TR-503

極小限定の内包的処置

有馬　淳

September, 1989

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03) 456-3191～5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

極 小 限 定 の 内 包 的 処 置

(PRELIMINARY REPORT)

有馬 淳

ICOT Research Center
Mita Kokusai Bldg. 21F 4-28 Mita 1-chome, Minato-ku, Tokyo, 108, Japan
Phone: +81 3 456 4365, C.Mail Address: arima

Keywords: 非単調推論, 常識推論, 極小限定, 等号, 単一名仮説

[梗概]

McCarthy によって提案された極小限定 (circumscription) は, 人間が行なう常識的な推論の非単調性を形式化する最も有力な手法の 1 つである. 極小限定は現在いくつかの版が提案されているが, それらはすべて述語を外延的に極小化, 即ち, 述語の外延を極小化するものである. 本論文では, このような手法によって生ずる 3 つの問題点 (他例外の存在否定, 等号証明の限界, 矛盾する極小限定) を指摘したうえで, これらを解決する極小限定の内包的処置を提案する. この手法は述語を内包的に極小化する, 即ち, ある述語を満足する個体を指す名前の集合を極小化するというアイデアに基づいており, その形式化を内包極小限定と呼ぶ. 内包極小限定は "ある名前が指す個体がある指定した述語を満足するのは, 与えられた文から明示的にそう規定される場合だけである" との言明を表す.

なお, この手法は, 等号, 関数を含む一般的なデータベースのための単一名仮説 "異なる名前は, それらが同じものであるということが示されない限り異なる個体を指すものとする", の形式化も与えることを指摘する.

Abstract

Circumscription proposed by McCarthy is one of the most hopeful formalizations of nonmonotonic aspects of commonsense reasoning. It has several versions, however, they are all proposed for denotative minimization of predicates, that is, circumscription minimizes the extension of predicates. Regarding such treatment, this paper considers three problems; absence of abnormal things, a limitation on equality and formalization of the unique name assumption. This paper proposes a solution for them by presenting a connotative treatment of circumscription. This treatment is based on the idea of circumscribing predicates connotatively, that is, minimizing the set of names denoting objects which satisfy a certain predicate.

Besides, this treatment provides a form of the unique names hypothesis for a general database which allows the use of equality and functions.

1 はじめに

プログラムに常識的知識を与えることで, 不足した情報のもとでもプログラムが有効な結論を引き出せるようにしようという提案がなされて以来 [10], 同様の動機に基づくいくつかの手法が提案されてきた [3, 5]. しかし, 常識の理解をより深める必要があるとの認識から, '80 年初頭より常識的知識を論理的に表現しようとする研究が活発になされている [13, 14]. 本論文は, 最も有力な常識の形式化手法の一つである極小限定 (circumscription) [11, 12] をもとに, その形式化がはらんでいる重要な問題を指摘した上で, それらを解決する形式化を提案する. なお, 本論文は基本的な数理論理学, および極小限定に関する知識を前提とするが, 後者に関しては簡単な説明がなされる.

次の状況を考えてみよう.

Situation: "居間でくつろいでいるひとりの男が, 玄関のドアのノックの音を聞いた. 彼はノックするのは通常人間だということを知っているが, それに例外があったこともまた覚えていた. キツツキの Tweety がか

つてノックしたことがあるのだ．彼は大変疲れていたため，あまり動きたくなかった．“どなた?” とたずねるが，訪問者は名乗らずただノックするばかり...”

こういった状況では，結局，彼がその匿名者が人間であることを結論ずけ，重い腰をあげることになるだろうと我々は予測する．なぜなら，彼はノックするものは通常人間であることを知っており，匿名者が人間であるとの予測に反するどんな情報も得ていないからである．McCarthy は “通常成り立つ” 事実を表現するための一つの方法を提案した．そのアイデアは例外性をできるだけ少なく見積もることにある．そして，そのために，ある述語が極小の外延を持つことを言明する極小限定 (*circumscription*) と呼ばれる形式を提案した [11, 12]．例えば，上の状況は以下のように書く (議論を明瞭にするため，簡単化する)．

例題 1. 文 A を

$$\forall x(Knocks(x) \wedge \neg Ab(x) \supset Man(x))$$
$$\wedge Knocks(Anonym)$$
$$\wedge Ab(Tweety)$$
$$\wedge \neg Man(Tweety)$$

とする．A は，“ノックをするもので例外的 (abnormal) でないものは人間でない”，“匿名者がノックしている．”，“Tweety は例外的である”，“Tweetty は人間である” を表現している．極小限定のアイデアに沿うと，それぞれの個体は，利用可能な情報がそうでないことを示さない限り，普通のものと考えたいので，述語 Ab の外延は A を満足する極小の外延を持つとする (“Ab を極小限定する”)．また匿名者が人間であるか否かを知りたいので Ab の極小化に応じて解釈が変化することを許すことになる (“Man を可変とする”)．しかしながら，極小限定のこういった扱い方には幾つかの問題が生じる．

問題 1．他例外の存在否定

A における Man を可変とする Ab の極小限定から

$$\forall x(Ab(x) \equiv x = Tweety)$$

を得る．即ち，極小限定は “*Tweety* だけが例外的である” と主張することになる．この結果は不必要に強すぎると思える．我々が期待するのは匿名者 *Anonym* が人間であるという結論であり，そのためにはたんに，“匿名者が例外的でないと仮定してもそれが現在の知識に矛盾しないならば，そう考える” というだけで十分であって，“*Tweety* だけが例外的である” と考える必要はない．*Tweety* 以外にも例外が存在することを認めながらも *Anonym* は例外的でないと考えるのがより自然であるように思える．

問題 2．等号に関する限界

最も深刻な技術的問題は等号に関する極小限定の限界に関連する．

[定理 1] 与えられた (有限の長さの) 文におけるどんな無矛盾な極小限定も (即ち，どんな述語を極小限定してもどんな述語や関数を可変にしても)，与えられた文のモデルの最小基数 (cardinality) を変えることができない．

証明． 一般的にとく．極小限定のモデルは，領域の基数が等しいモデル間にある擬順序を入れ，その順序に関する極小のモデルとして定義される．有限のモデルがある時，基数において等しく順序に関して “小さな” 極小モデルが必ず存在する．よって，最小基数に等しい極小モデルが存在する．および，可算無限のモデルしかないとき，Löwenheim-Skolem 定理 [4] により可算無限の極小限定のモデルが存在．どちらの場合も最小基数は変わらない．詳しくは [1] 参照のこと．(証明終わり)

例題 1 に戻る．さて，A における極小限定の結果，

$$Anonym \neq Tweety \supset Man(Anonym)$$

が得られる．しかしながら，この文の結論，匿名者が人間である $Man(Anonym)$ という期待される結果を導くことは決してない．なぜならもしそのようなことが導かれるとすると，最小の基数が 1 から 2 以上へ変わることになるからである (A のモデルで，ただ一つの個体からなる領域 (domain) を持つモデルを構成できる．したがって，A のモデルの最小基数は 1 である．さて，もし $Man(Anonym)$ が極小限定の結果得られたとすると，$\neg Man(Tweety)$ から $Anonym \neq Tweety$ が成り立つことになり，最小基数が 2 以上になることになる)．これは定理 1 に矛盾する．

この事実を別の見方で説明してみよう．極小限定からは，$Tweety$ が表す個体だけが Ab を満足すると言う結論が導かれるが，このことだけでは $Anonym$ がその個体を表している可能性を否定できない．すなわち，Ab の外延的な極小化と項の指示に関する解釈とは無関係である．

上記の事実にもかかわらず，$Man(Anonym)$ を導くことを求めるとなると，$Anonym \neq Tweety$ であることを知る必要がある．ところがこの状況では，ドアを開けてみない限りその情報は得られない．すなわち，ドアを開けにいくべきか否かを決定するためにドアを開けなくてはならないという非常識的な状況におちいるのである．

上記の問題に対して，"単一名仮説 (Unique Name Assumption)" の導入を思い付くかもしれないが，現在のところ，満足できる単一名仮説の形式化はなされていない．

Reiter は，"単一名仮説 (Unique Name Assumption)" と呼ばれる，"異なる名前は異なる個体を指すと仮定する" という考え方を提案した [15]．すなわち，構文上異なる項は互いに異なるものとするという仮説である．この仮説の有用性は論文 [15, 16] で十分に述べられているが，多くの場合否定的知識が肯定的知識に比べはるかに多いため，肯定的知識のみを陽に記述し，そこから証明できない知識は否定的知識として扱うのが実際的であるという認識から特にデータベースの分野で広く認められている．Clark はこの仮説の一つの形式化を行なったが [2]，それは "異なる名前は異なる個体を指す" という言明に他ならず，異なる名前を持つものが等しいものとなる可能性が無視されていた．すなわち，$Anonym = Tweety$ や $Farther\_of(Zen) = Ken$ といった構文上異なる項が等しくなることがあってはならなかった．しかし，一般の世界では構文上異なる表現が同じものを指している場合がしばしばみられ，表現の自然さからこのような場合を許す必要が生じる．そこで，単一名仮説を "異なる名前は，それらが同じものであるということが示されない限り異なる個体を指すものとする" と捕らえることになる．このより広い意味での単一名仮説の考えを形式化しようとする試みは極小限定を使って行なわれているが [8, 12]，それらを含めて以下の条件を満たす単一名仮説の形式化は知られていない．1) 与えられる文として等号，関数記号を持つ任意の一階述語論理式を許すこと，また，2) 与えられる言語，文が有限の場合，その形式が有限の文で記述できること．

問題 3．矛盾する極小限定

極小限定のもう一つの大きな問題は，極小限定が一般には無矛盾性を維持しないということである．即ち，無矛盾な一階述語論理式における極小限定の結果が矛盾することが指摘された [6]．極小限定は，与えられた事実のもとで，ある性質 P が極小の外延をもつことの言明にほかならないため，性質 P が極小の外延をもたない場合矛盾する．次はその例である．

例題 2. 文 A を

$$\exists x(N(x) \wedge \forall y(N(y) \supset x \neq S(y)))$$
$$\wedge \forall x(N(x) \supset N(S(x)))$$
$$\wedge \forall x, y(S(x) = S(y) \supset x = y)$$

とする．N の直感的な解釈の一つとして，ある数を始点とする自然数の集合があり，あきらかに A は無矛盾な文である．ここで N が極小の外延を持つと仮定しその集合の始点を K とすると，$K+1$ を始点とする自然数の集合とする N の解釈はまた A のモデルとなり，前者の集合に真に包含されるより小さな N の外延が存在することになり，仮定に矛盾する．ある述語が極小の外延を持つか否かは一般にこれ程ど明らかでないため，極小限定が矛盾を起こす事実が問題になる．

この論文ではこれら 3 つの問題の解決を試みる．ここでとるわれわれの解決法は従来の極小限定が外延的に極小化してきたのにたいし，内包的に極小化するといったものである．すなわちここでは，ある述語を満足する個体の集合を極小化するのではなく，その述語を満足する個体を指す名前の集合を極小化する．この内包的な極小化を意味する極小限定をここでは内包極小限定 (*connotative circumscription*) と呼ぶ．直感的にいうと，内包極小限定は，"ある名前が指す個体がある指定した述語を満足するのは，与えられた文から明示的にそう規定される場合だけである" との言明を表す．もう少し詳しくいうと "性質 C を満足する個体を指すことが与えられた事実 A から示される名前は性質 C を満足する個体を指す名前のすべてである" という考えの形式的表現である．

例題 1 で考えよう．Ab の性質を満たすことが分かっているのは $Tweety$ と呼ばれれている個体だけである．$Anonym$ と呼ばれている個体に関しては不明である．ここで $Tweety$ が Ab の性質を満たす個体を指す名前のすべてであると考えると，$Anonym$ は別の名前であるから，それが指す個体は Ab の性質を満足しないという結論を導くことができる．よって，期待する結果，$Man(Anonym)$ を得ることができる (問題 2 の解決)．外延的な極小限定では，$Anonym$ と $Tweety$ が Ab を満足する同じ個体を表している可能性を否定

できないことが問題であった．これに対し内包極小限定では，$Tweety$ という名前だけが Ab を満足する個体を指すという結果と $Anonym$ と $Tweety$ とは異なる名前，構文上異なるものである事実を利用することで $Anonym$ の指す個体が Ab を満足しないことを導くのである．

さて，ここで極小化したのは名前の集合であって，個体の集合ではない．$Tweety$ という名前だけが Ab の性質を満たす個体を指すが，このことは Ab の性質を満たす個体が $Tweety$ と名付けられたものだけであるということを意味しない．名前を持たない個体に関しては何も言っていないので，ほかに Ab の性質を満たす個体が存在する可能性を否定していない (問題 1 の解決)．

例題 2 で示された問題は，存在限定された変数に対して名前を与え (例えば，始点に 0 という名前を与える)，内包的な極小化を行なうことにより解決できる．この結果は 0 から始まる名前の集合，0，S(0)，... だけが N の外延を指すことになる．この極小の外延が存在することにより内包的極小化は矛盾を起こさない (問題 3 の解決)．

第 2 節では以上の内包的な極小化を表す形式，内包極小限定を与える．第 3 節では，より強い結果を導くための拡張，他分野との関係，および今後の課題等が述べられる．

2　内包極小限定

この節の最終的な目的は，“ある名前がある指定した述語の外延に属する個体を指すのは，与えられた文からそう規定される場合だけである”ことを言明する形式的な表現を与えることである．

論理では，言語に対して何らかの実体を割り当て，その実体をもって言語の解釈とするが，言語の世界 (syntax) と実体の世界 (semantics) は異なる機構を持つ互いに独立したシステムである．そのため，“構文上異なる”といった言語の世界に関する事実を解釈するためには構文の世界そのものも実体として扱う必要が生じる．ここでは項に関する構文の世界とその解釈が必要となる．

与えられた言語のすべての基礎項 (ground term) に対して一意に対応する個体を考えよう．この意図的な意味は，それらが各項に対する構文上の差異を示す“名前”を表すことである．これらの個体を含んでいる世界を内包世界 (*connotative universe*) と呼ぶ (内包世界のすべての個体がある基礎項に対応しているわけではないが，もしすべての個体がそれぞれの基礎項を表しているならば，この内包世界は Herbrand 空間と同型 (isomorphic) になる)．これに対し，与えられた公理によって表現される通常の世界を外延世界 (*denotative universe*) と呼ぶ．例題 1 を例にとると，内包世界には，$Anonym, Tweety$ に対し，異なる 2 つの個体 (名前)(それぞれ $\widehat{Anonym}, \widehat{Tweety}$ で表す) が存在する (すなわち，$\widehat{Anonym} \neq \widehat{Tweety}$)．一方，外延世界では必ずしもそれらが異なる個体を表している必要はない (すなわち，$Anonym = Tweety$ が許される)．

さて，構文の世界の基礎項に対してある実体が割り当てられている状態 (基礎項の解釈) を表すのに，1 引数の部分関数 Π を導入する．Π は内包世界から外延世界への関数であり，内包世界の個体が外延世界の個体を指示していることを表す．例えば，名前，$Anonym$ が $Anonym$ で表現されている個体を指していることを $\Pi(\widehat{Anonym}) = Anonym$ と表現する．

2.1　言語

我々の解法は言語 $L = L_L \cup L_D \cup L_C$ を使って表現される．L_L は論理記号からなり，L_D は関心のある世界に関する表現のために使われる外部的な言語である．したがって，与えられる文 A は言語 $L_L \cup L_D$ の (有限の長さの一階述語) 文であることが仮定される．L_C は内包世界の記述に使われる内部的な言語である．

L_L はカッコ，(,),，と結合記号，$\wedge, \vee, \neg, \supset, \equiv$，量記号，$\forall, \exists$，および，等号，$=$，からなる．$L_D$ と L_C はともに述語 (定数と変数)，関数 (定数と変数) を表す記号からなるが，両者に共通部分はない (個体定数，個体変数は 0- 引数の関数と考える)．もし，記号 K が言語 L_D の要素だとすると，言語 L_C は，K の上に“ $\hat{}$ ”をつけた同類の (*similar*) 記号 $\hat{K}$ を含む．ここで，記号組，$\mathbf{K}(= K_1, \ldots, K_n)$ と $\mathbf{L}(= L_1, \ldots, L_n)$ が同類であるとは，各 i に対して K_i と L_i が共に述語記号 (あるいは共に関数記号) であり，かつ同じ引数であることをいう．したがって，n- 引数述語定数 P が L_D の要素であれば，L_C は n- 引数述語定数 $\hat{P}$ を要素として含む．関数 F，およびそれぞれの変数 p と f に関しても同様である．すなわち，$P, p, F, f, \ldots$ が L_D の要素であるとすると，$\hat{P}, \hat{p}, \hat{F}, \hat{f}, \ldots$ は L_C の要素である．特に，記号 K が L_D の要素である時，記号 K と $\hat{K}$ は互いに組づけられている (*paired*) 言うことにする．

さらに，L_C は組づけられていない以下の記号を含む．1-引数関数 Π (内包世界の要素から外延世界の個体を指す関数を表す)，および 2-引数述語 $\doteq$ (内包的な等号を表し，両者が Π によって同じ個体を指すことを表す)，そしてさらに算法に関する関数: 0 (ゼロを表す)，S (successor 関数を表す)，$+$ (加算を表す)，$\times$ (乗算を表す)，および $\uparrow$ (ベキ乗を表す) である．

なお，言語 L_D を外延的言語，言語 L_C を内包的言語と呼び，L_D，L_C の記号はそれぞれ外延的である，または内包的であるという．また本論文では便宜上，定数には大文字で始まる記号，変数には小文字で始まる記号を使うことにする．

2.2 内包化

我々の解法は外延世界に加えて内包世界を考え，極小限定の適用を内包世界の中だけに制限する．与えられる文は外延世界の制約と考えられるから，その制約を内包世界に取り込むことを考える．その作業を内包化 (*connotativization*) と呼ぶ．

内包世界は構文的な基礎項を表す名前の集合を含むとしたい．我々が扱うのは有限の文であるから，基礎項の数は高々可算無限個となる．そのためそれらを表す内包世界は可算無限個の要素があればよいことになる．また同様の理由で，外延世界も可算無限個あれば十分であるから (Löwenheim-Skolem 定理参照; [4])，我々が扱う領域の各要素に自然数を対応させ，それだけで閉じているものとして話を進める．つまり，このアプローチで扱う領域は自然数の集合そのものである．また，内包世界は自然数全体とするため，外延世界は内包世界の部分集合 (または，そのもの) になるが，高々可算無限個の要素からなるどんな外延世界も，それと同型な (isomorphic) 世界を自然数の世界の中で構成できるので，外延世界を内包世界の外で構成するのと内に構成するのでは実質的な問題ではないことに注意すべきである．この自然数の世界を構成するためにまず数論を導入する．

1) **数論**．可算無限個の個体の存在を決定づける目的と，あとで述べる単一化を行なう目的で次の公理が導入される．

(a) N_A

ここで N_A とは

$$
\begin{array}{llll}
 & \forall\hat{x}(S(\hat{x}) \neq 0) & \wedge & \forall\hat{x},\hat{y}(S(\hat{x}) = S(\hat{y}) \supset \hat{x} = \hat{y}) \\
\wedge & \forall\hat{x}(\hat{x} + 0 = \hat{x}) & \wedge & \forall\hat{x},\hat{y}(\hat{x} + S(\hat{y}) = S(\hat{x} + \hat{y})) \\
\wedge & \forall\hat{x}(\hat{x} \times 0 = 0) & \wedge & \forall\hat{x},\hat{y}(\hat{x} \times S(\hat{y}) = (\hat{x} \times \hat{y}) + \hat{x}) \\
\wedge & \forall\hat{x}(\hat{x}\uparrow 0 = S(0)) & \wedge & \forall\hat{x},\hat{y}(\hat{x}\uparrow S(\hat{y}) = (\hat{x}\uparrow\hat{y}) \times \hat{x}) \\
\wedge & \multicolumn{3}{l}{\forall\hat{p}(\hat{p}(0) \wedge \forall\hat{x}(\hat{p}(\hat{x}) \supset \hat{p}(S(\hat{x}))) \supset \forall\hat{x}\hat{p}(\hat{x}))}
\end{array}
$$

ここで $x \neq y$ は $\neg(x = y)$ を表す．

以下では，$S(0)$ を 1, $S(S(0))$ を 2,... と表し，$\hat{x}\uparrow\hat{y}$ を $\hat{x}^{\hat{y}}$ と書くことにする．$0, 1, \ldots$ は自然数と呼ばれ，自然数の集合を $\hat{N}$ で表す．

2) **単一名化**．

内包的な世界上の関数 $\hat{F}$ を，$\hat{F}$ と組づけられた外延的な関数 F の構文的情報を“そのまま残す”ような関数としよう．すなわち，$\hat{F}$ から逆に関数名が‘F’であることや，F の引数，第 k 引数の構文的情報などが再現できる関数である．すべての組づけられた内包的関数にこのような関数をそれぞれ一つ割り当てたとしよう．すると，外延的な基礎項 G と，G における外延的関数の現れをすべて組づけられた内包的関数に置き換えた結果である基礎項 $\hat{G}$ とが一対一に対応することになる．すなわち，任意の外延的基礎項に一意の“名前”を与えることになるのである．さらに，基礎項に限らず構文上異なる項 (変数の renaming によって等しくなる項は同じ項とみなす) は異なる内包的関数で表されることになり，内包的関数の相違から構文上の相違を知ることができるのである．

単一名化とは，自然数上の関数を使ってこのような内包的関数を定義することであり，内包的関数は外延的関数の構文情報を損なわない一種のコードを意味ものと考えられる．こうした手法の利点は 1) 2 つのコードの差異が数論から導出できることによって，各々が対応する L_D の 2 項の構文上の差異がわかることと，2) もし，L_D の関数が有限個であれば，有限の長さの文で記述できること等である．単一名化にはいくらか準備が必要である．単一名化で主要な役割をする関数 $<>^n$ について述べる．

任意の $n \geq 1$ に対し，$<>^n$ は次の条件を満たす n-引数関数であるとする．

<>^{n}: $\hat{N}^n \to \hat{N}$, かつ, A_N を仮定した時, 次の関係が成り立つ.
任意の自然数 $n, m(\leq n), x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m$ に対して,

$$< x_1, ..., x_n >^n = < y_1, ..., y_m >^m \supset n = m \wedge x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$$

このような関数 <>^{n} が存在することはよく知られている. 例えば, $< a_1, \ldots, a_n >^n \equiv 2^n \times 3^{a_1} \times \cdots \times Pr(n+1)^{a_n}$ であり, ここで $Pr(n)$ はn番目の素数を表す. このことは <>^{n} が自然数の任意の有限列をある自然数にコード化し, そのコードから逆にもとの有限列を再現する方法がある関数であることを意味している. それはまた異なる自然数列が異なる自然数にコード化されることを意味している. このようなひとつの関数 <>^{n} を与え, 単一名公理を導入する.

b) 単一名公理. 単一名公理は L_D に現れるすべての関数に対し一意の自然数上の関数にコード化する. 単一名公理は U_N で表される次の文の論理積である. L_D 中のすべての F に対して,

$$\forall \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}(\hat{F}(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}) = < \dot{F}, \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n} >^{n+1})$$

ここで $\hat{F}$ と F は組づけられた関数であり, $\dot{F}$ は $F \in L_D$ に対し, 各々異なるよう割り当てた自然数である.

$< \dot{F}, x_1, \ldots, x_n >^{n+1}$ は $\hat{N}^n$ から $\hat{N}$ への n-引数関数とみなせるので, これを $\dot{F}(x_1, \ldots, x_n)$ と略記する ($< \dot{F}, x_1, \ldots, x_n >^{n+1}$ は L_C の関数だけから構成されていることに注意).

この公理によって, 内包的な項 $\hat{G}$ から一意にもとの対応する項 G が決まる. すなわち, 内包的関数が異なれば対応する外延的な項も異なる. 例えば, 先の <>^{n} の例をとると個体定数 F, 1引数関数 G, 2引数関数 H に対して相異なる自然数 $\dot{F}$, $\dot{G}$, $\dot{H}$ を与えると, $\hat{G}(\hat{F}) = 2^1 \times 3^{\dot{G}} \times 5^{2^0 \times 3^{\dot{F}}}$, $\hat{H}(\hat{x}, \hat{F}) = 2^2 \times 3^{\dot{H}} \times 5^{\hat{x}} \times 7^{2^0 \times 3^{\dot{F}}}$ となり, 自然数論から導ける素因数分解定理により, 一意に各々に対応する外延的関数が決まる. すなわち, $\forall \hat{x}(\hat{G}(\hat{F}) \neq \hat{H}(\hat{x}, \hat{F}))$ が導けることによって, $G(F)$ と $H(x, F)$ が構文上異なることを知ることができる.

命題1. 任意の外延的な項 $t \in L_D$ に現れる関数のすべてを対応する組づけられた内包的関数に置き換えてできる項を $\hat{t}$ とおく. $A_N \wedge U_N$ を仮定すると, 構文上の t を 関数 $\hat{t}$ に写像する関数 Ψ は全単写である (ただし, 変数の renaming により等しくなる項は構文上等しいとみなす).

証明. t と $\hat{t}$ に関する帰納法による.

次に内包化について述べる. 内包化では, 内包世界から外延世界への 1-引数関数 Π を使う. 直感的には, Π は内包世界にある構文上の名前を外延世界の個体に移す関数である.

2) 量記号の内包化. 量記号を内包化するのに, 次の公理を導入する.

(c) $A^{conn(\Pi)}$,

ここで $A^{conn(\Pi)}$ とは全称記号に関する内包化 ($C\forall$) と存在記号に関する内包化 ($C\exists$) によって形成された文の論理積である.

全称記号に関する内包化とは与えられた文 A におけるすべての $\forall x B(x)$ を $\forall \hat{x} B(\Pi(\hat{x}))$ に置き換えることであり, 存在記号に関する内包化は与えられた文 A におけるすべての $\exists x B(x)$ を $\exists \hat{x} B(\Pi(\hat{x}))$ で置き換えることである. ただし, $B(x)$ は任意の文とする. 量記号の内包化は, 内包世界の要素が指す個体が与えられた文を満足することを意味している.

3) 記号の内包化. 最後に外延世界の述語, 関数のそれぞれに対して内包世界の述語, 関数を関係づける公理が導入される.

(d) Π に関する公理. 外延世界の記号と内包世界の記号を以下の公理 $\Pi-axiom$ によって結び付ける.
Π-axiom($\Pi; \doteq$) は 次の (ΠF) 文:
すべての n-引数関数 $F \in L_D$ と $\hat{F} \in L_C$ に対して,

$$\forall \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}(F(\Pi(\hat{x_1}), \ldots, \Pi(\hat{x_n})) = \Pi(\hat{F}(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})))$$

(0-引数関数, すなわち個体定数または自由個体変数 F_c に対しては $F_c = \Pi(\hat{F_c})$) と, 次の (ΠP) 文:
すべての n-引数述語 $P \in L_D$ と $\hat{P} \in L_C$ に対して,

$$\forall \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}(P(\Pi(\hat{x_1}), \ldots, \Pi(\hat{x_n})) \equiv \hat{P}(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}))$$

(0-引数述語，すなわち命題 P_r に対しては $P_r \equiv \hat{P}_r$)，および 次の (Π =) 文:

$$\forall \hat{x_1}, \hat{x_2}(\Pi(\hat{x_1}) = \Pi(\hat{x_2}) \equiv \hat{x_1} \doteq \hat{x_2})$$

の 3 種のすべての文の論理積である．

Π-axiom(Π; ≐) は関数 Π が，関係と関数を保存する内包世界から外延世界への準同型 (homomorphic) 関数であることを言明している．

Π に関する公理を仮定すると，$A^{conn(\Pi)}$ は外延的な記号が現れない文 $\hat{A}^{conn}$ に書き換えることができる．次の命題がそれを示す．

定義． A の単純内包化とは，文 A 中のすべての関数 $F \in L_D$ を $\hat{F}$，すべての述語 $P \in L_D$ を $\hat{P}$ に，また，すべての等号 $=$ を $\doteq$ に置き換えたものである．単純内包化の結果は $\hat{A}^{conn}$ と表す．($\hat{A}^{conn}$ は完全に $L_C \cup L_L$ の記号だけで記述されることに注意せよ．)

命題 2. 次の文が成り立つ．

$$\Pi-axiom(\Pi; \doteq) \supset A^{conn(\Pi)} \equiv \hat{A}^{conn}$$

証明． $A^{conn(\Pi)}$ に対し，
$F(\Pi(\hat{x_1}), \ldots, \Pi(\hat{x_n}))$ を $\Pi(\hat{F}(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}))$ に，続いて $P(\Pi(\hat{x_1}), \ldots, \Pi(\hat{x_n}))$ を $\hat{P}(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}))$ に，最後に $\Pi(\hat{x_1}) = \Pi(\hat{x_2})$ を $\hat{x_1} \doteq \hat{x_2})$ に置き換えると $\hat{A}^{conn}$ が得られる．以上の置き換えは Π-axiom(Π; ≐) のもとですべて等価である．　(証明終わり)

以上の理由により，$\hat{F}$ ($\hat{P}, \doteq$) を F ($P, =$) の内包化と呼ぶ．また，言語 L_D の述語，関数の記号組 **K** に対し，各要素が対応する記号の内包化になっている記号組 $\hat{\mathbf{K}}$ を **K** の内包化と呼ぶ．以後，$\hat{\mathbf{K}}$ は **K** の内包化を表すものとする．

また，(a), (b), (c), (d) で述べた公理の論理積 $A_N \wedge A^{conn(\Pi)} \wedge \Pi-axiom(\Pi; \doteq) \wedge U_N$ を $\hat{A}$，で表すと，次のことがいえる．

命題 3. A が無矛盾な文ならば，$\hat{A}$ も無矛盾．

証明. A_N は無矛盾，$A_N \wedge U_N$ は各々の内包的関数 $\hat{F}$ を U_N の定める自然数上の関数とする解釈があるので，確かにそのようなモデルが存在する．

A^D は A の個体変数の変域を D に制限した文を表し，形式的には A におけるすべての $\forall x B(x)$ を $\forall x(D(x) \supset B(x))$，すべての $\exists x B(x)$ を $\exists x(D(x) \wedge B(x))$ に置き換えた結果を表すとする．また $F-axiom(D)$ は A におけるすべての n- 引数関数 F に対して，F を D 上に作用する関数とする文，$\forall x_1, \ldots, x_n(D(x_1) \wedge \ldots \wedge D(x_n) \supset D(F(x_1, \ldots, x_n))$ の論理積を表わすとする．

D を A に現れない任意の 1 引数述語とする．すると $A_N \wedge U_N \wedge A^D \wedge F-axiom(D)$ は無矛盾 (A と $A_N \wedge U_N$，D とは，関数，述語記号において共通部分がないことから明らか)．

D を Π の値域とする，すなわち，$D = \lambda x(\exists \hat{x}(x = \Pi(\hat{x})))$ とすれば，$\Pi-axiom(\Pi; \doteq) \supset (A^D \equiv A^{conn(\Pi)}) \wedge F-axiom(D)$ だから，$A_N \wedge U_N \wedge A^D$ のもとで，$\Pi-axiom(\Pi; \doteq)$ を満たす関数，すなわち，準同型関数 Π，および内包的述語，等号が存在することがいえれば，$\hat{A}$ はモデルが存在することになり，無矛盾であることを示すことができる．

$\hat{P}, \doteq$ は $P, \Pi, =$ の解釈に従って $\Pi-axiom(\Pi; \doteq)$ を満たすよう決めることができるが，$\hat{F}$ は U_N によって解釈が決まっているので，関数を保存する内包世界から外延世界への準同型関数 Π を満足する解釈が存在することを示す必要がある．関数 $\hat{F}$, F の解釈をそれぞれ $\hat{F}'$, F' と書く．

準同型関数 Π を帰納的に構成することで示す．内包世界の有限部分集合 $d(i)$ に対してのみ Π' の写像が定義されているとする．任意の $e_1, \ldots, e_n (\in d(i))$ に対し，任意の n- 引数内包的関数 $\hat{F}'$ の適用の結果，$\hat{F}'$ および $e_1, \ldots, e_n$ に対して一意に内包世界の要素 $e_{\hat{F}}$ が決まる ($\hat{F}'$ の U_N による制約から $e_{\hat{F}} \notin d(i)$ であることに注意．すなわち，この要素に対してはまだ Π' の値は決められていない)．この $e_{\hat{F}}$ に対する Π' の値を $F'(\Pi'(e_1), \ldots, \Pi'(e_n))$ なる外延世界の要素とする．つぎに $d(i+1) = d(i) \cup \{e_{\hat{F}}\}$ としてこの操作を繰り返す．内包世界の要素は可算無限であるからこれにより全内包世界の要素に対して Π' の値が定義される．　(証明終わり)

2.3 内包極小限定

いよいよ，内包極小限定を定義する．内包極小限定はある述語 C を満足する個体を指す名前の集合 $\hat{C}$ の極小化を表す．すなわち，$\hat{A}$ において $\hat{C}$ を極小化する．

$[\mathbf{K}/\mathbf{L}]$ は $\mathbf{K}$ の それと同類の $\mathbf{L}$ への置換を表す．すなわち，$A[\mathbf{K}/\mathbf{L}]$ は A 中の $\mathbf{K}$ のそれぞれの要素に同時に対応する $\mathbf{L}$ の要素を代入した結果を表す．もし，文脈から $\mathbf{K}$ が明らかな場合は単に $[\mathbf{L}]$ と書く．

$\mathbf{K} \leq \mathbf{L}$ ($\mathbf{K} = K_1, \ldots, K_m$，$\mathbf{L} = L_1, \ldots, L_m$) は $\mathbf{K}$ と $\mathbf{L}$ が同類である文

$$\forall \mathbf{x_1}(K_1(\mathbf{x_1}) \supset L_1(\mathbf{x_1})) \wedge \ldots \wedge \forall \mathbf{x_m}(K_m(\mathbf{x_m}) \supset L_m(\mathbf{x_m}))$$

の略記法である．また，$\mathbf{K} < \mathbf{L}$ は $(\mathbf{K} \leq \mathbf{L}) \wedge \neg(\mathbf{L} \leq \mathbf{K})$ を表す．

定義．$\mathbf{C}, \mathbf{Z}$ を相異なる内包的でない述語定数の組とし，等号 $=$ が $\mathbf{C}$ か $\mathbf{Z}$ のいずれか一方に必ず現れるとする．$\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{Z}}$ は $\mathbf{C}, \mathbf{Z}$ の内包化である．$\mathbf{E}$ は すべての外延的述語と関数の組である．A は外延的言語で記述された一階述語論理文とする．この時，

$\mathbf{Z}$ を可変とした $\mathbf{C}$ の A における内包極小限定 とは $C\!-\!Cir(A;\mathbf{C};\mathbf{Z})$ で表される文

$$\hat{A} \wedge \neg\exists \pi, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{e}.(\hat{A}[\pi, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{e}] \wedge \hat{\mathbf{c}} < \hat{\mathbf{C}}),$$

のことである．

内包極小限定は単純内包化によって，驚くほど簡単になる．

定理 2.

(1) $\quad C\!-\!Cir(A;\mathbf{C};\mathbf{Z})$

$$\equiv \hat{A} \wedge \neg\exists \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}((\hat{A}^{conn} \wedge \hat{E}\!-\!axiom(\hat{=}))[\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}] \wedge \hat{\mathbf{c}} < \hat{\mathbf{C}})$$

が成り立つ．ここで，$\hat{E}\!-\!axiom(\hat{=})$ は 次の (=) 文:

$$\forall \hat{x}(\hat{x} \hat{=} \hat{x})$$
$$\wedge \forall \hat{x}, \hat{y}(\hat{x} \hat{=} \hat{y} \supset \hat{y} \hat{=} \hat{x})$$
$$\wedge \forall \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}(\hat{x} \hat{=} \hat{y} \wedge \hat{y} \hat{=} \hat{z} \supset \hat{x} \hat{=} \hat{z})$$

と，次の $(P =)$ 文:

すべての内包的 n- 引数述語定数 $\hat{P} \in L_C$ に関して，

$$\forall \hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}, \hat{y_1}, \ldots, \hat{y_n}(\hat{x_1} \hat{=} \hat{y_1} \wedge \ldots \wedge \hat{x_n} \hat{=} \hat{y_n} \supset (\hat{P}(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}) \equiv \hat{P}(\hat{y_1}, \ldots, \hat{y_n})))$$

との論理積である．

(2) さらに，もし等号が A に現れなければ，

$$C\!-\!Cir(A;\mathbf{C};\mathbf{Z},=) \equiv \hat{A} \wedge \neg\exists \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}(\hat{A}^{conn}[\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}] \wedge \hat{\mathbf{c}} < \hat{\mathbf{C}})$$

が成り立つ．

証明. (1) 命題 2，および $(\Pi =)$ 文 ならば $\hat{E}\!-\!axiom(\hat{=})$ が成り立つから，$\hat{A}$ は

$$A_N \wedge \hat{A}^{conn} \wedge \Pi\!-\!axiom(\Pi; \hat{=}) \wedge U_N \wedge \hat{E}\!-\!axiom(\hat{=})$$

と等価．ここで，$A_N \wedge U_N$ 中に $\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{Z}}, \mathbf{E}, \Pi$ のいづれの要素も現れない．また，$\hat{A}^{conn} \wedge \hat{E}\!-\!axiom(\hat{=})$ および，$\hat{c} < \hat{C}$ 中には $\mathbf{E}, \Pi$ のどの要素も現れないことに注意する．

$\forall \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}(\hat{E}\!-\!axiom(\hat{=})[\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}] \supset \exists \pi, \mathbf{e}(\Pi\!-\!axiom(\Pi; \hat{=})[\pi, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{e}]))$ を証明すれば十分である．

任意性を失わず内包的述語 $\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}$ の解釈を $\hat{\mathbf{C}}', \hat{\mathbf{Z}}'$ で表したとき，$\hat{E}\!-\!axiom(\hat{=})$ から a) π，$\mathbf{E}$ 中の b) 外延的関数，および c) 外延的述語の順に存在を証明する．

a) はじめに $\hat{E}\!-\!axiom(\hat{=})$ から $\Pi\!-\!axiom(\Pi; \hat{=})$ 中の $(\Pi =)$ 文を満たす π が存在することを導く．

$$\forall \hat{x_1}, \hat{x_2}(\pi(\hat{x_1}) = \pi(\hat{x_2}) \equiv \hat{x_1} \hat{=}' \hat{x_2})$$

さて，$\hat{E}-axiom(\hat{=})$ から $\hat{=}'$ に関する同値類 E_i $(i=0,1,\ldots)$ を考えることができる（$\hat{=}'$ は定義より，$\hat{\mathrm{C}}', \hat{\mathrm{Z}}'$ 中に含まれている）．ここで，各々の同値類 E_i から任意に一つの要素をとり（代表元），$\hat{e_i}$ と名ずける．Π' を E_i の任意の要素を $\hat{e_i}$ に移す関数 $(i=0,1,\ldots)$ とすると，Π' は上記の $(\Pi =)$ 文の π を満たす．

この Π' を使って，$\Pi-axiom$ を満足する外延的述語，関数を決めることができる．

b) 任意の外延的関数 F の現れは $\Pi-axiom(\Pi;\hat{=})$ 中 (ΠF) 文のみである．

$$\exists f \forall \hat{x_1},\ldots,\hat{x_n}(f(\Pi'(\hat{x_1}),\ldots,\Pi'(\hat{x_n})) = \Pi'(\hat{F}'(\hat{x_1},\ldots,\hat{x_n})))$$

任意の n 個の要素に Π' を適用した結果である $\Pi'(\hat{x_1}),\ldots,\Pi'(\hat{x_n})$ に対して，$\Pi'(\hat{F}(\hat{x_1},\ldots,\hat{x_n}))$ を値として返す関数 F' は明らかに上文における f を満たす．

c) 任意の外延的述語 P の現れは $\Pi-axiom(\Pi;\hat{=})$ 中 (ΠP) 文のみである．

$$\exists p \forall \hat{x_1},\ldots,\hat{x_n}(p(\Pi'(\hat{x_1}),\ldots,\Pi'(\hat{x_n})) \equiv \hat{P}'(\hat{x_1},\ldots,\hat{x_n}))$$

次の述語 P' が上文における p を満たす（Π' は $(\Pi =)$ 文を満足していることに注意）．

$$P' = \lambda x_1,\ldots,x_n(\exists \hat{y_1},\ldots,\hat{y_n}(x_1 = \Pi'(\hat{y_1}) \wedge \ldots \wedge x_n = \Pi'(\hat{y_n}) \wedge \hat{P}'(\hat{y_1},\ldots,\hat{y_n})))$$

(2) の証明．$\hat{=}$ は $\hat{E}-axiom(\hat{=})$ のみに現れる．(1) の場合と同様に $\exists \hat{eq}(\hat{E}-axiom(\hat{eq}))$ を示せばよい．eq を $=$ とすると，明らかに $\hat{E}-axiom(=)$ が成り立つ．（証明終わり）

定理 2 が意味することは，与えられた文に $\hat{E}-axiom(\hat{=})$ を加えて，通常どうりの極小限定を行なえば，その結果と $\hat{A}$ からだけで内包極小限定が行なえるということである．本論文の残りの部分では，$C-Cir(A;\mathrm{C};\mathrm{Z})$ は命題 2，定理 2 を使った簡単な文を表すことにする．

例題 1 (続き) ここでは Man を可変とし，Ab を内包的に極小化することを考える．外延的言語 L_D を文 A に現れる記号だけからなるとしよう．すると，定理 2 (2) の結果を使って，$C-Cir(A;Ab;Man,=)$ は

$$A_N \wedge \hat{A}^{conn} \wedge \Pi-axiom(\Pi;\hat{=}) \wedge U_N$$

$$\wedge\neg\exists\widehat{ab},\widehat{man}(\hat{A}^{conn}[\widehat{ab},\widehat{man}] \wedge \widehat{ab} < \widehat{Ab})$$

を表す．ここで $\neg\exists\widehat{ab},\widehat{man}(\hat{A}^{conn}[\widehat{ab},\widehat{man}] \wedge \widehat{ab} < \widehat{Ab})$ は

$$\forall\widehat{ab},\widehat{man}(\hat{A}^{conn}[\widehat{ab},\widehat{man}] \wedge \forall\hat{x}(\widehat{ab}(\hat{x}) \supset \widehat{Ab}(\hat{x})) \supset \forall\hat{x}(\widehat{Ab}(\hat{x}) \supset \widehat{ab}(\hat{x})))$$

のことであり，$\hat{A}^{conn}[\widehat{ab},\widehat{man}]$ は

$$\forall\hat{x}(\widehat{Knocks}(\hat{x}) \wedge \neg\widehat{ab}(\hat{x}) \supset \widehat{man}(\hat{x}))$$

$$\wedge\widehat{Knocks}(\widehat{Anonym})$$

$$\wedge\widehat{ab}(\widehat{Tweety})$$

$$\wedge\neg\widehat{man}(\widehat{Tweety})$$

$\Pi-axiom(\Pi;\hat{=})$ は

$$Anonym = \Pi(\widehat{Anonym})$$

$$\wedge Tweety = \Pi(\widehat{Tweety})$$

$$\wedge\forall\hat{x}(Ab(\Pi(\hat{x})) \equiv \widehat{Ab}(\hat{x}))$$

$$\wedge\forall\hat{x}(Man(\Pi(\hat{x})) \equiv \widehat{Man}(\hat{x}))$$

$$\wedge\forall\hat{x}(Knocks(\Pi(\hat{x})) \equiv \widehat{Knocks}(\hat{x}))$$

$$\wedge\forall\hat{x_1},\hat{x_2}(\Pi(\hat{x_1}) = \Pi(\hat{x_2}) \equiv \hat{x_1}\hat{=}\hat{x_2})$$

である．また U_N は

$$\widehat{Anonym} = \dot{A}nonym \wedge \widehat{Tweety} = \dot{T}weety$$

である．

$C-Cir(A; Ab; Man, =)$ において，$\widehat{ab} = \lambda\hat{x}(\hat{x} = \widehat{Tweety})$ および $\widehat{man} = \lambda\hat{x}(T)$ を代入すると (ここで，T は恒真な文，たとえばある命題記号 P_r に対し $(P_r \vee \neg P_r)$ を表す)，

$$\forall\hat{x}(\widehat{Ab}(\hat{x}) \supset \hat{x} = \widehat{Tweety})$$

すなわち，

$$\forall\hat{x}(Ab(\Pi(\hat{x})) \supset \hat{x} = \widehat{Tweety})$$

を得る．

これは，$Tweety$ の名だけが Ab を満足する個体を指すということを表している．$\widehat{Anonym}$ と $\widehat{Tweety}$ はともに単一名公理から異なる自然数を付与されているから (例えば，$\widehat{Anonym} = 0$ であり，$\widehat{Tweety} = 1$ である)，

$$\neg\widehat{Ab}(\widehat{Anonym}) \wedge \widehat{Man}(\widehat{Anonym})$$

を得る．これは $\Pi{-}axiom(\Pi; \hat{=})$ より次の文に等しい．

$$\neg Ab(Anonym) \wedge Man(Anonym)$$

この結果は“$Anonym$ は例外的ではなく，人間である”という望まれた結果を表すが，通常の極小限定では決して得ることができない結果であることに注意すべきである．さらに，“$Tweety$ の名だけが Ab を満足する個体を指す”という結果は，与えられた文に現れず名を持たない個体 (Π の値域にない個体) については何もいっていないので，例外的な個体が $Tweety$ 以外にも存在する可能性を許している．このことは先に述べた問題 1 および 2 を内包極小限定が解決することを表している．

ただし，内包極小限定も定理 1 の限界を越えてはいないことに注意すべきである．しかしながら，どんな内包極小限定のモデルも最小基数が可算無限 (ω) となり，原理上，1 から ω 個の要素からなる任意の外延世界を生み出すことが可能である．

例題 3 (単一名仮説)．内包極小限定は広義の単一名仮説を形式的に表現できる．等号 $=$ を内包的に極小化する．

例題 3.a. Clark の等号理論 (Clark's equality theory).

A は等号 $=$ の正の出現がない文としよう．すると，$C{-}Cir(A; =)$，

$$\hat{A} \wedge \forall\hat{eq}((\hat{A}^{conn} \wedge \hat{E}{-}axiom(\hat{=}))[\hat{=}/\hat{eq}] \wedge \forall\hat{x},\hat{y}(\hat{eq}(\hat{x},\hat{y}) \supset \hat{x}\hat{=}\hat{y}) \supset \forall\hat{x},\hat{y}(\hat{x}\hat{=}\hat{y} \supset \hat{eq}(\hat{x},\hat{y})))$$

は，$\hat{=}$ が $\hat{A}^{conn}$ に正には出現しないことから，$\hat{A}^{conn}$ は $\hat{=}$ の極小化には影響しないため，

$$\hat{A} \wedge \forall\hat{eq}(\hat{E}{-}axiom(\hat{eq}) \wedge \forall\hat{x},\hat{y}(\hat{eq}(\hat{x},\hat{y}) \supset \hat{x}\hat{=}\hat{y})$$

$$\supset \forall\hat{x},\hat{y}(\hat{x}\hat{=}\hat{y} \supset \hat{eq}(\hat{x},\hat{y}))),$$

と単純化される．ここで，$\hat{eq}$ に $=$ を代入すると

$$\forall\hat{x},\hat{y}(\hat{x}\hat{=}\hat{y} \supset \hat{x} = \hat{y})$$

を得る．したがって，

$$\forall\hat{x},\hat{y}(\hat{x} \neq \hat{y} \supset \Pi(\hat{x}) \neq \Pi(\hat{y}))$$

が導かれる．これは異なる名前はことなる個体を指すという単一名仮説の狭義の定義に他ならない [命題 1 および Clark's Equality Theory [2] 参照].

もし A が有限の長さの文であって，L_D が有限個の記号からなるとすると，あきらかに $C{-}Cir(A; =)$ は有限の長さの文になることに注意せよ．A が有限の長さの文であること，および，L_D が有限個の記号からなることは実際に我々が記述できる文が有限の文であることから実質的な制限にはならない．また，我々のアプローチは有限の一階述語論理 A にいかなる制約も持たない単一名仮説の形式化であることに注意すべきである．次の例題は $=$ の正の出現がある場合である．

例題 3.b. 閉領域公理 (domain closure axiom) を含む文.

文 A を

$$\forall x(x = Jekyll \vee x = Hyde) \wedge Man(Stevenson)$$

とする. これは, "すべてのものは $Jekyll$ か $Hyde$ であり, $Stevenson$ は人間である" ことを表す. ここで, 等号 $=$ の関係が成り立つことが極力ないようにしよう. すなわち, $=$ の内包極小限定を考える. $C\text{−}Cir(A;=)$ において (例題 2. a. 参照), $\hat{A}^{conn}$ は

$$\forall \hat{x}(\hat{x} \hat{=} \widehat{Jekyll} \vee \hat{x} \hat{=} \widehat{Hyde}) \wedge \widehat{Man}(\widehat{Stevenson})$$

$\hat{E}\text{−}axiom(\hat{=})$ は ($=$) 文および

$$\forall \hat{x}, \hat{y}(\hat{x} \hat{=} \hat{y} \supset (\widehat{Man}(\hat{x}) \equiv \widehat{Man}(\hat{y})))$$

との論理積である. $C\text{−}Cir(A;=)$ で $\hat{=}$ に $\lambda x, y(x = y \vee x = \widehat{Jekyll} \wedge y = \widehat{Stevenson} \vee y = \widehat{Jekyll} \wedge x = \widehat{Stevenson})$ を代入すると, $\hat{A}^{conn}$ および $\Pi\text{−}axiom$ により単純化されて,

$$\begin{aligned} &\widehat{Stevenson} \hat{=} \widehat{Jekyll} \\ &\supset \forall \hat{x}, \hat{y}(\hat{x} \hat{=} \hat{y} \supset (\hat{x} = \hat{y} \vee \hat{x} = \widehat{Jekyll} \wedge \hat{y} = \widehat{Stevenson} \\ &\qquad \vee \hat{y} = \widehat{Jekyll} \wedge \hat{x} = \widehat{Stevenson})) \end{aligned}$$

を得る. この結果の x, y に $\widehat{Jekyll}, \widehat{Hyde}$ を代入した文, および, A_N と U_N から

$$\widehat{Stevenson} \hat{=} \widehat{Jekyll} \supset \neg(\widehat{Jekyll} \hat{=} \widehat{Hyde})$$

が導かれる. 同様に,

$$\widehat{Stevenson} \hat{=} \widehat{Hyde} \supset \neg(\widehat{Jekyll} \hat{=} \widehat{Hyde})$$

が成り立つ. この上記 2 文と $\hat{A}^{conn}$ から

$$(\widehat{Stevenson} \hat{=} \widehat{Hyde} \vee \widehat{Stevenson} \hat{=} \widehat{Jekyll}) \wedge \neg(\widehat{Jekyll} \hat{=} \widehat{Hyde})$$

が得られる. これから $\Pi\text{−}axiom$ によって,

$$(Stevenson = Hyde \vee Stevenson = Jekyll) \wedge Jekyll \neq Hyde$$

が導ける. この結果は等号の (内包的) 極小化を表している.

3 拡張および考察

ある種の応用ではこれまで述べてきた内包的な扱いによる結果よりも強い結論が必要かも知れない. この節ではまず, より強い結論を得るために考えられるいくつかの拡張について 1), 2), 3) で述べ, 最後に 4) で, 内包極小限定の知識表現以外の分野との関連について簡単にふれる. なお, これらは別の機会に詳しく報告する.

1) "他例外の存在否定" の問題は, 常識的知識を記述する際に例外性を外延的に極小化することに対する批判であり, ある応用では通常の極小限定の強い結果がより望ましいかも知れない. その場合には, $\Pi\text{−}axiom$ に次の (ΠOC) 文を加えることで望みの強い結果を導くことができる.

(ΠOC) 文とは, **C** に現れるすべての述語定数 C に関する文:

$$\forall x_1, \ldots, x_n(C(x_1, \ldots, x_n) \supset \exists \acute{x}_1(x_1 = \Pi(\acute{x}_1)) \wedge \ldots \wedge \exists \acute{x}_n(x_n = \Pi(\acute{x}_n)))$$

の論理積である. この文は, Π の値域が C の外延を構成するすべての個体を含むことを宣言するもので, C を満足する個体はすべて名前を持つことを表している. 例題 1 において, 上記の (ΠOC) 文の C に Ab を代入した文を $\Pi\text{−}axiom$ に加えた場合には,

$$\forall x(Ab(x) \supset x = Tweety)$$

を得る. いまなお $\neg Ab(Anonym) \wedge Man(Anonym)$ も得ることができることに注意せよ.

2) もうひとつの興味深い拡張はスコーレム化 (*Skolemization*) に関係する. 次の例を考えよう.

例題 1'. 例題 1 における文 A の "$Knocks(Anonym)$" を

$$\exists x Knocks(x)$$

としよう．例題 1 と同様に‘誰か’がドアをノックしているが，今回は個体定数 ($Anonym$) で表現しない．この場合もやはり，‘それ’が人間であると推論させるべきであろうか？ これは場合によると考えられる．しかしともかく，もしそう結論づけたければ，内包世界におけるスコーレム化によって期待した結論を得ることができる．量記号に関する内包化の結果にスコーレム化を施す．その結果，文 A は

$$\forall \hat{x}(\widehat{Knocks}(\hat{x}) \wedge \neg \widehat{Ab}(\hat{x}) \supset \widehat{Man}(\hat{x}))$$

$$\wedge \widehat{Knocks}(\hat{G})$$

$$\wedge \widehat{Ab}(\widehat{Tweety})$$

$$\wedge \neg \widehat{Man}(\widehat{Tweety})$$

と内包化される．ここで $\hat{G}$ はスコーレム関数であり，$G \in L_D$ とする (または定義の若干の変更を許せば，$\hat{G} \in L_C$ かつ $G \notin L_D$ とし，$\hat{G}$ に関する U_N のみを仮定する．このほうが内包世界のみでスコーレム化する直感に近いかも知れない)．

Man を可変とした Ab の内包極小限定の結果，やはり

$$\widehat{Knocks}(\hat{G}) \wedge \neg \widehat{Ab}(\hat{G}) \wedge \widehat{Man}(\hat{G})$$

を得る．この文と $\Pi-axiom$ の存在により，

$$\exists x(Knocks(x) \wedge \neg Ab(x) \wedge Man(x))$$

が導かれる．

スコーレム化された内包化に基づく内包極小限定 (これをスコーレム内包極小限定と呼ぶ) は次の重要な性質がある．

定理 3. A を無矛盾な閉文 (closed sentence) (つまり，A に自由変数は現れない) とする．この時，A におけるどんな スコーレム内包極小限定も無矛盾である．

証明．$Cir(A;\mathbf{C};\mathbf{Z}) \equiv A \wedge \neg \exists \mathbf{c}, \mathbf{z}(A[\mathbf{c},\mathbf{z}] \wedge \mathbf{c} < \mathbf{c})$ とおく．$Cir(A;\mathbf{C};\mathbf{Z})$ は通常の極小限定に他ならない．文 B のスコーレム化を B^* で表す (B^* は全称文になる．すなわち，$\forall \mathbf{x} A$ と表せる文．ここで，$\mathbf{x}$ は個体変数の組であり，A は量記号が現れない任意の文である)．スコーレム内包極小限定を $C_S\!-\!Cir(A;\mathbf{C};\mathbf{Z})$ とかくと，定理 2 を使って，

$C_S\!-\!Cir(A;\mathbf{C};\mathbf{Z})$

$$\equiv A_N \wedge U_N \wedge \Pi\!-\!axiom(\Pi;\doteq) \wedge Cir((\hat{A}^{conn})^* \wedge \hat{E}\!-\!axiom(\doteq);\mathbf{C};\mathbf{Z})$$

$$\equiv \Pi\!-\!axiom(\Pi;\doteq) \wedge Cir((\hat{A}^{conn})^* \wedge \hat{E}\!-\!axiom(\doteq) \wedge A_N \wedge U_N;\mathbf{C};\mathbf{Z})$$

ここで命題 3 より $(\hat{A}^{conn})^* \wedge \hat{E}\!-\!axiom(\doteq) \wedge A_N \wedge U_N$ は無矛盾．

全称文において述語のみを可変とする任意の極小限定はモデルを持つことがわかっている [9] から，上文で $\Pi-axiom$ を除いた部分のモデルが存在する．さて，そのモデルにおける解釈から逆に $\Pi-axiom$ を満たす Π および外延的述語，外延的関数を構成できることは定理 2 の証明中に示した．つまり，$C_S\!-\!Cir(A;\mathbf{C};\mathbf{Z})$ のモデルが存在する．　(証明終わり)

これは問題 3 を解決する．

3) この他の拡張として，すべての組づけられた内包的関数を単一名化するのでなく，部分的に単一名化することが考えられる．これはある関数だけは構文上の差異を考えないという場合に使え，極小限定で関数を可変とすることに相当し，より融通性のある形式化になる．しかし，この場合には一般に内包極小限定も無矛盾性を維持しない．

4) 他分野との関係．本研究は常識的知識の形式化に動機づけられているため，不必要に多くの読者の興味を減じてしまうことを恐れる．そこで，最後に他分野との関係を指摘しておきたい．

本研究は演えきデータベースおよび論理プログラムの意味論と深い関係があることが予想される．閉世界仮説 [16]，完備化 [2] と極小限定との関係に関する研究が最近多く見られるが，これらの間の等価性を述べるためには数理的モデルと Herbrand モデルとの相違に由来する条件，すなわち，“閉領域仮説 (domain closure assumption)” [15] および単一名仮説を仮定しなければならなかった．閉領域仮説が極小限定で形式化できることは既に知られており [11]，本研究によって単一名仮説の形式化が与えられたことにより，内包極小限定によって 3 者の関係を調べるのは残された興味深い研究と思われる．極小限定がデータベースの研究に寄与したように [7]，内包極小限定は等号，関数を含めた一階述語論理データベース，および論理プログラムにおける新しい展開に対する意味論として貢献できると考える．

4　おわりに

常識的知識の記述において有力な手法であり，演えきデータベースおよび論理プログラムの意味論と深い関連がある極小限定の重要な 3 つの欠点をこの研究によって克服することができる．また，結果的に広い意味の単一名仮説の形式化を与えるため，陽に等号の使用を許す新しいデータベースのための意味論としても貢献できると考える．

謝辞

本研究を進めるにあたり，有益なご示唆をいただいた山形大 岩沼宏治氏，ICOT 研究所の方々，特に佐藤洋介氏，佐藤健氏，古川康一研究次長に，また，本研究の機会を与えて下さった淵一博所長に感謝致します．

References

[1] Arima,J.: The anonym problem: a weak point of circumscription on equality, *ICOT TR - 400* (1988).

[2] Clark,K.L.: Negation as failure, in *Logic and Data Bases,* Plenum Press, New York 293-322 (1978).

[3] Doyle,J.: A Truth Maintenance System, *MIT AI Memo 521* (1979).

[4] Enderton,H.B.: A mathematical introduction to logic, Academic Press, New York (1972).

[5] Hewitt,C.: Description and theoretical analysis of PLANNER: a language for proving theorems and manipulating models in a robot, *MIT AI Lab. TR-258* (1972).

[6] Etherington,D., Mercer, R. and Reiter, R.: On the adequacy of predicate circumscription for closed-world reasoning, *Computational Intelligence 1* 11 - 15 (1985).

[7] Gelfond,M., Przymusinska,H. and Przymusinski,T.: The extended closed world assumption and its relationship to parallel circumscription, *Proc. of Principle of Database Systems* 133 - 139 (1986).

[8] Lifschitz,V.: Some results on circumscription, *TR* Stanford Univ., Stanford, CA (1984).

[9] Lifschitz,V.: On the satisfiability of circumscription (Research Note), *Artificial Intelligence 28* 17 - 27 (1986).

[10] McCarthy,J.: Programs with common sense, in *Proc. of the Teddington Conference on the Mechanization of Thought Processes,* H.M. Stationery Office, London, (1960).

[11] McCarthy,J.: Circumscription - a form of non-monotonic reasoning, *Artificial Intelligence 13* 27 - 39 (1980).

[12] McCarthy,J.: Application of circumscription to formalizing common-sense knowledge, *Artificial Intelligence 28* 89 - 116 (1986).

[13] McDermott,D. and Doyle,J.: Non-monotonic Logic I, *Artificial Intelligence 13* 41 - 72 (1980).

[14] Reiter,R.: A logic for default reasoning, *Artificial Intelligence 13* 81 - 132 (1980).

[15] Reiter,R.: Equality and domain closure in first-order data bases, *JACM 27* 235 - 249 (1980).

[16] Reiter,R.: On closed world data bases, In *Logic and Data Bases,* Plenum Press, New York 55 - 76 (1978).