ICOT Technical Report: TR-480

TR-480

半群作用を持つマージ構造とその上の単一化理論

向井 国昭

June, 1989

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03) 456-3191－5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

半群作用を持つマージ構造とその上の単一化理論*
Merge Structure with Semi-Group Operation and Its Unification Theory

向井 国昭
Kuniaki Mukai

新世代コンピュータ技術開発機構
Institute for New Generation Computer Technology

概要

レコード状の構造とそのマージ操作を，半群に作用されるレコード代数とよぶ半代数系として定式化する．次に，コンパクト性を持ち，かつ充足可能性と単一化可能性が同値になるような制約理論としてレコード代数上の単一化理論を与える．これらの結果に基づいて，レコード代数上の制約論理プログラミングに，表示的意味論として最大意味論を，操作論的意味論として SLD 導出のふたつの意味論を与え，その完全性と健全性およびさらに解の表示定理を証明する．Negation- As-Failure の規則の完全性と健全性の成立も示す．理論の応用として，エルブラン領域をレコード代数内の特別な部分構造として自然に埋め込み，さらに 単一化文法記述の基本的枠組としてレコード代数上の限定節文法 (DCG) を再定義する．単一化文法理論で用いられる有向グラフ (DAG) 領域がレコード代数上の単一化問題の表現として解釈されることを示す．

キーワード: 自由代数系，レコード，DAG，グラフ・マージ，制約，単一化文法理論，制約論理プログラミング，コンパクト性，完全性，健全性．

1 はじめに

木構造を骨格とするデータ構造は，さまざまな分野において基本的な役割を持つ．本稿では，これらのデータ構造を便宜上レコード[1]と総称する：言語理論における**構文木**や計算言語学の**素性集合** (feature set)，グラフ理論における**有向グラフ**，知識表現における**フレーム**，オブジェクト指向パラダイムにおける**属性一値対リスト**，人工知能における**連想リスト**，Lisp 言語の**プロパティ・リスト**，関係データベースにおける**レコード**，プログラミング言語における**型**，等々．

単一化文法理論は，言語情報を素性集合としてとらえ，句構造規則の形式で，素性集合の間の制約を記述する．素性集合全体の集合を F で示す．部分的な情報をマージしてより大きな情報を作り出すという思想から，F の構造として，情報の部分性についての順序構造が要請される．例えば，情報 ((age 21) (sex $female$)) と ((sex $female$) (age 21) ($name$ $Mary$)) は，前者は後者の部分であるという関係にある．

サイクルの無い有限有向グラフ (DAG: finite directed acyclic graph) の全体を D で示す．DAG 領域 D には，与えられた複数の DAG をマージして，ひとつの DAG を作り出す**グラフ・マージ**という操作が自然に定義されている．

一階述語論理の関数記号と定数記号から作られる基礎項 (変数を含まない項) の全体を，エルブラン領域とよび H で示す．**エルブラン領域には，(同一関係 = 以外の) 順序関係は組込まれていない．単一化文**法理論の素性集合領域 F の計算モデルとして DAG 領域 D が好んで用いられてきた．順序構造を持たないエルブラン領域 H は失格しているのである．しかし，H には組込み制約理論として，与えられた複数の項を同一の項にする最も一般な代入をもとめる単一化操作が 標準的に組込まれている．Prolog に組込ま

*ICOT-TR480, 1989 年 7 月 25 日 小改訂

[1] 最善の名前とは考えないが，代案が思い浮かばないので，消極的に採用する．

れている限定節文法 DCG(Definite Clause Grammar)[Pereira and Warren 80] は素性集合を基礎項で表し，Prolog 組込みの単一化機構により基礎項の間の等式制約を解く．しかし，単一化文法の基本思想である情報の部分性は組込まれてはいないので，たとえば 基礎項 $f(a,b)$ と $f(a,b,c)$ は等しくないとして扱われるのみである.[2].

それでは，DAG 領域とエルブラン領域を統合化したようなプログラミング領域を導入し，しかも情報の部分性を組込んだ制約理論としての単一化理論を与えることができるであろうか？ 本稿の目的は，この問題に対するひとつの解の提案である．

レコード代数 $\mathcal{R}=(R,G,+,\cdot,/\!\!/,\epsilon)$ は，ある半群 G からの左右両作用 ($\cdot$ と $/\!\!/$) を持ち，かつ冪 (べき) 等律を満たす可換半群 R のことと定義する．R の演算は加法 $(+)$ で表す．$\mathcal{R}=R$ と略記する．R の要素を，**レコード**とよぶ．G の要素を**アクセス**とよぶ．$\alpha \in G$, $x \in R$ として，左作用は $\alpha \cdot x$ と書き，右作用は $x/\!\!/\alpha$ の形に書く．ϵ は R の $+$ に関する単位元である．R には，$a \leq b$ を $a+b=b$ と定義することにより順序構造が入る．

一般に，レコードはフィールドの値として再びレコードを持ち得る．一方，レコードの基本構成要素となる対象 — たとえば数や文字など — は，マージや左作用などでは表現できないレコードすなわち，既約レコードとして特徴付けられる．つまり，数や文字などの定数 (タグと総称する) は既約レコードと同一視される．

レコードの簡単な例は葉節点 (terminal node) のみにタグを持つような木構造である．R をそのような木構造の集合としよう．アクセスは木構造におけるパス (path) に相当する．パスの集合 G は結合演算の下に，単位半群を成している．$x/\!\!/\alpha$ は木 x のパス α でアクセスできる x の部分木を表す．$\alpha \cdot x$ はパス α に木 x を接ぎ木して得られる木を表す．$+$ は木のマージである．ϵ はタグを持たないシングルトンの木である．

ある生成系を持ち，すべての元がマージと左作用のいわば (無限) 線形和の形で表せ，かつ順序 $\leq$ に関して完備なレコード代数が，求める領域にふさわしい性質を持っていることが示される．エルブラン項の次数 (arity) に相当する概念は，半群 G における，接頭語に関して閉じている部分系として定義される．この概念を用いて，エルブラン領域をレコード代数に埋め込まれている部分系と見ることができる．

レコードの間の基本関係はマージ可能関係 $\bowtie$ である：$u \bowtie v$ は $u+v$ が R で定義されることである．制約理論の定式化のためレコード代数 R を不定元の系 X により自由拡大したレコード代数 $R[X]$ を用いる．単一化理論とは，$R[X] \times R[X]$ の部分集合に関するある条件として定式化される．与えられた $R[X] \times R[X]$ の部分集合 C に対して，単一化理論を満たしているその最小の拡張を求めることとして C の単一化問題が定式化される．

p と q を $R[X]$ の要素とする．$f(p)$ と $f(q)$ がマージ可能であることの他に，いくつかのある付帯条件 Δ を満足する代入 $f : X \to R$ のことを対 (p,q) の解と定義する．そうすると，制約 C が与えられたとき (1) C の解が存在することと，(2) C が単一化可能であることが同値になる．これは，付帯条件 Δ なしでは成立しない．

本論の構成は，まずレコード代数を導入し，次に，単一化可能性と充足可能性をそれらが同値になるように理論を構成する．つぎに，レコード代数の上のホーン節プログラムのクラスを導入し，その宣言的意味論と手続き的意味論を与える．宣言的意味論は，無限木をも扱うので，最大意味論を用いる．それらの同等性 (健全性と完全性) を証明する．また Negation-As-Failure 規則 (NAF) の健全性と完全性も示す．証明すべき定理の形は，Lloyd [84] を参考にしているが，制約の解の集合の不変性に着目するなど，むしろモデル論的な手法を採った．最後に，エルブラン領域を，単一化文法にふさわしい領域であるレコード領域の中に自然に埋め込めることを示すことにより，従来の，限定節文法 (DCG) をレコード領域の上に拡張する．

レコード代数領域と，その単一化はすでに CIL とよぶ言語に組込まれており [Mukai 85,87,88; Mukai and Yasukawa 85]，自然言語処理応用に使われている．CIL は Edinburgh Prolog と ESP [Chikayama 84] の上で稼働している．

レコード構造の上の単一化理論には，非常に多くの関連研究がある．本稿のレコード代数の理論とそれらの理論的な関係の比較は興味ある課題である．しかし，詳細な比較は，本稿の範囲外である．

まず，F.Pereira と S.Shieber [84] は単一化文法を計算機プログラムと見なして D.Scott の表示意味論を適用した．しかし，手続き的意味論との関係など，領域のこまかな性質は扱っていない．PATR-II[Shieber 他 86] は DAG の上の単一化文法理論の記述の代表的な枠組である．本稿の単一化は PATR-II の素性のマージすなわちグラフ・マージと直観的には，ほぼ同値と考えられる．(しかし本稿では無限木を

[2]文字列としての辞書式順序は別の問題である．

も扱っている.) エルブラン項はレコードの退化した形 (*degenerated form*(Shieber)) であり, DCG は単一化文法のコンパイルされた形として理解されている. レコード代数は, 制約論理プログラミングの思想 [Jaffar and Lassez 84] の立場から, このコンセンサスの数学的な表現を与える試みである. 本稿のレコード代数的手法の結論として, DAG は $R[X]$ の元の対の集合と見ることができ, さらに, それが単一化問題の表現形として自然に解釈できることが示される.

レコードを, 部分関数として解釈すると状況意味論 [Barwise and Perry 83] および状況理論 [Barwise 85] と関連性がでて来る. すなわち, 関係の引数が部分的に与えられている事態 (state of affairs) の表現に使える [Mukai 88]. また, C.Pollard[85] は, 状況意味論において, 次数のない (*anadic*) 関係のアイデアを出したが, 本稿のレコード代数はそのモデルとなっている.

Barwise[87] は, 反基礎の公理を持つ集合論 ZFC/AFA[Aczel 88] の世界で, 状況理論のモデルを構成した. 無限木は, ZFC/AFA のモデルになることが知られているので, レコード代数の上にモデルを作ることもできる. たとえば, 本稿のレコード代数でも解補題 (solution lemma) と類似の命題が成り立つ. ZFC/AFA 流と較べて本稿の特徴は, レコード代数の上の計算可能な単一化理論を定式化している点である.

H. Aït-Kaci[84] も一階述語の項を型の理論の観点から批判して, それをレコードとして見ることを提案し, そのため半束 (semi-lattice) 理論を用いた. しかし, 半束の上のプログラムの宣言的意味論は与えていない. 本稿では, レコード代数の上の制約論理プログラミングの宣言的意味論が与えられる.

Kasper-Rounds[86] も 素性集合の単一化論理をオートマトンモデルをもとに提案した. 最近 G. Smolka[88] が, ソート (sort) を導入してそれらを整理拡張し, 否定 (negation) や選択 (disjunction) を含む情報の上の制約理論を与えた: 素性集合の集合についての制約式に関する理論を示し, 与えられた集合式を正規形に変換する (NP- 完全な) 手続きを示したものである. 本稿は素性集合に関する制約の理論であり, 対象とするオブジェクトのレベルが異なっている. しかし, レコード代数領域の上にも, 否定や選択の記述を組み込んで表現力を高めることは, 今後の興味ある課題である.

J. Goguen は, 本稿の古い版に対して, 順序付きのソートの系を持つ等式代数 Order Sorted Algebra(OSA) [Goguen and Meseguer 85] を用いても定式化できることを簡単な例で示した. 本稿は, 無限木構造を扱い, しかも, ホーン節プログラムの意味として最大意味論を採っているので, 始代数 (initial algebra) に基づく OSA の手法がそのまま適用できるのかどうか, 必ずしも明らかではない. M. Maher [88] は無限木の公理化を試みているが, それは B. Courcelle[83] の扱った無限木と同様に, 次数概念を前提としている. A.Colmerauer[82] は無限木の上の Prolog を提唱したが, 無限木の定式化を含めて, 厳密な取り扱いは行っていない.

本稿の用いる代数系の用語は, 弥永・小平 [61] に従った.

2 部分タグ付き木

レコードの基本要素としての数や文字列などの基本データの集まりを V とおく. V の要素を**タグ**とよぶ. タグはアトムであり, その下部構造は考えない. ここでは V は単に集合とする. V は, 次節において, マージ系とよぶ, ある 2 項部分演算 + を備えた代数系として一般化される.

本節では, (無限) レコードのモデルとして, 葉にのみタグが許される部分タグ付き木 (PTT) を構成的に導入する. PTT の全体集合はレコード代数を成すことおよび生成条件をもつ完備な自由レコード代数として特徴付けられることが, 後節において示される. 半群において $\alpha = \beta\gamma$ ならば β を α の接頭語という.

定義 1 次の条件を満たす単位半群 G をアクセス半群という:

(1) 各 $x \in G$ の接頭語は有限個数である.

(2) α が β の接頭語である ($\alpha \leq \beta$ と書く) という 2 項関係 $\leq$ は G の半順序関係を成す.

G の要素を**アクセス** (access) とよぶ. アクセス半群は, 通常の文字列とその結合の一般化である: L を**ラベル**の集合とする. ラベル $a_1, \ldots, a_n$ から成る列を $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ と書く. ここで, n は非負整数でありこの列の長さとよぶ. とくに, $n = 0$ の場合, すなわち $\langle\rangle$ は空列を表す. 空列の長さは 0 である. ふたつの列 α と β の結合を $\alpha * \beta$ 書く. 演算子 "*" は普通, 省略する. その定義は, 次の等式による:

$$\langle\rangle\alpha = \alpha,$$

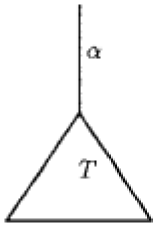

図 1: 木 T に対するアクセス α の左作用: αT

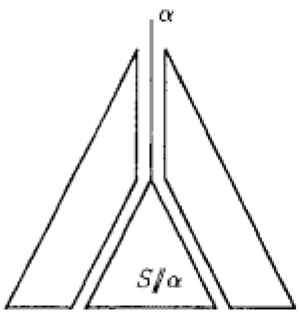

図 2: S/α は木 S の,「パス」α で「アクセス」される部分を示す (右作用).

$$\alpha\langle\rangle = \alpha,$$

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\langle b_1, \ldots, b_m\rangle = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle.$$

一般に集合 X から生成される自由単位半群を X^* で表す. L^* はすべての列から成る集合である. 記法の便宜上, しばしば, 長さが 1 の列 $\langle a\rangle$ を a と略す. L^* がアクセス半群を成すことは明らかである.

G を一般のアクセス半群とする. 接頭語に関して閉じている, アクセスからなる非空集合 T を木 (tree) とよぶ. すなわち, $\alpha\beta$ が T の要素ならば α も T の要素である. 定義により, どんな木も長さが 0 のアクセスすなわち空アクセスを要素として含んでいる. 空アクセスのみから成る木を単位木とよぶ.

二つの木 T_1 と T_2 の和集合 $T_1 \cup T_2$ は木である. 同様に, 共通部分 $T_1 \cap T_2$ も木である. 二つの木に限らず, 一般に木の任意の系について, 和集合および共通部分が再び木である.

α と T をアクセスと木とする. T の任意のアクセス α' についてアクセス $\alpha\alpha'$ を含むような (集合の包含関係の意味で) 最小の木を αT で示す. (図 1.) すなわち:

$$\alpha T = \{\beta | \exists\beta' (\exists\alpha' \in T\ \beta\beta' = \alpha\alpha')\}.$$

例えば, $L = \{a, b, c, d\}$ としてアクセス半群 L^* の場合, $T = \{\langle\rangle, \langle b\rangle, \langle c\rangle, \langle c, d\rangle\}$ ならば $aT = \{\langle\rangle, \langle a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, c, d\rangle\}$ である.

さらにいくつかの用語を導入しよう. S, S' をアクセスから成る集合とする. $\alpha S'$ が S の部分集合であるような最大の集合 S' を, それが空集合でないときに限り, S/α で示す. すると木の定義により, S' は木である. S が木のとき, S/α の形の木を S の部分木とよぶ. (図 2.)

一般に, アクセス α は木 T において無限個の分岐を持つことがある. たとえば, $G = L^*$ の場合, T が無限個の異なるラベル a について 部分木 $(T/\alpha)/a$ を持つことがある. T において, 自分以外のアクセスの接頭語になっていないアクセス α を T の葉とよぶ. すなわち, もし $\alpha\beta$ が T のアクセスならば β は空アクセスである. T の葉の全体集合を $leaf(T)$ で示す. $\beta = \alpha a$ となるラベル a が存在するとき, β は α の直後であるという.

V を非空集合とする. V の要素をタグとよぶ. $leaf(T)$ から V への部分函数を T のタグ函数とよぶ. タグ函数は空函数すなわち, 定義域が空であってもよい.

定義 2 木 T と T のタグ函数 f の順序対 (T, f) をタグ付きの木 (**PTT**(*partially tagged tree*)) とよぶ. *(図 3.)*

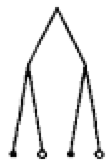

図 3: タグ付きの木: 白丸はタグ無しの状態を表し, 黒丸はタグを表す.

単位木と空函数の対を単位PTTとよび ϵ で示す. f をタグ関数として, $f(\alpha) = v$ のとき v を α のタグとよぶ. アクセス半群 G とタグの集合 V を明示するときは (G,V)-PTT と参照する.

さて, アクセス α に対して, 次のように, PTT の上にも左作用 (αt) と右 (部分) 作用 (t/α) を定義する: $t = (T,f)$ を PTT, α をアクセスとして, $\alpha t = (\alpha T, f^{\alpha})$ と定義する. f^{α} は等式 $f^{\alpha}(\beta) = f(\gamma)$ で定義される αT のタグ函数である. ここで, γ は $\alpha\gamma = \beta$ なる β の「接尾語」アクセスである.

右 (部分) 作用は, α を T のアクセスとして, $t/\alpha = (T/\alpha, f_{\alpha})$ と定義する. ここで, f_{α} は 等式 $f_{\alpha}(\beta) = f(\alpha\beta)$ で定義される, T/α のタグ函数である.

$t_1 = (T_1,f_1)$ を $t_2 = (T_2,f_2)$ を二つの PTT とする. $f_1 \cup f_2$ が木 $T_1 \cup T_2$ のタグ函数であるときおよびそのときに限り, $t = (T_1 \cup T_2, f_1 \cup f_2)$ を t_1 と t_2 のマージとよび, $t_1 + t_2$ と書く. たとえば, ある $\alpha \in T_1 \cap T_2$ に対して, $f_1(\alpha)$ と $f_2(\alpha)$ がともに定義されているが異なる値を持つならば, $t_1 + t_2$ は定義されない. また, ある $\beta \in T_1$ に対して, $f_1(\beta)$ は定義されているが β が $leaf(T_2)$ の元でないときも, $t_1 + t_2$ は定義されない. 容易にチェックされるように, PTT の全体集合 P は, マージ (部分) 演算 $(+)$ とアクセスの左右両作用 $(\cdot, /)$ に関して次の性質を満たす: マージに関して可換律, 結合律, べき等律が成り立つ. また 単位元 (零元) ϵ を持つ. アクセスの左作用と右作用の二つの演算はマージに関して分配律が成り立つ. さらに簡約律 $(\alpha x)/\alpha = x$ を満たす.

PTT から成る非空集合は, 任意の二つの要素がマージを持つときおよびそのときに限り両立的という. t_1, t_2 をふたつの PTT $t_1 = (T_1,f_1)$, $t_2 = (T_2,f_2)$ とする. $T_1 \subset T_2$ かつ $f_1 \subset f_2$ であることを $t_1 \leq t_2$ と書く. この $\leq$ が P の上の完備な半順序関係であることは, 和集合演算の完備性に基づき, 容易にチェックできる. アクセスの左右両作用が上限をとる演算と可換であることも困難なく証明できる.

(G,V)-PTT の全体集合を P とおき, PTT-代数とよぶ. V の各元を, それをタグとする単位木に対応させることにより, V を P の中へ埋め込める. この埋め込みを φ とおく.

次節で PTT 代数 P が, 演算 $+$, 左作用「$\cdot$」, 右作用「$/$」, 単位元 ϵ の元に関して, φ を標準単射とする, V の上の自由完備 G-レコード代数 $(P,G,+,\cdot,/,\epsilon)$ であることが証明される. すなわち PTT-代数は, V の上の完備 G-レコード代数の中で最も普遍的なものとして特徴付けられる.

3 レコード代数

前節で具体的に構成された PTT 代数のいくつかの性質を抽象化して**レコード代数**を導入する. PTT 代数を特徴付けるためにいくつかの概念を導入する. 集合 M の元の間の部分演算 $+$ が, 結合律, 可換律, べき等律を満たすとき, M を**マージ系**という. 任意の集合 X は自明なマージ系 $(X,+)$ と同一視できることに注意する. ここで, $+$ は異なる要素の間では定義されずかつ $a + a = a$ であるような 2 項部分演算である.

集合 X の上の G-レコード代数 R の概念が基本的である. これらの概念は, 後ほどの部分単一化理論の充足性と完全性の定義の基礎となる.

R を**レコード集合**とよぶ集合とする. G をアクセス半群とする. ϵ を R の特別な元とする. $+$ を R の部分演算すなわち $R \times R$ から R の中への部分函数とする. G の元は **R へ左から作用する**. すなわち $G \times R$ から R の中への部分函数「$\cdot$」が存在して, 半群としての左作用を与える. その作用を $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ の形に書く. さらに, **G は R へ右から作用する**. すなわち $R \times G$ から R の中への部分函数 $/$ が存在し, 半群としての右作用を与える. その作用を $(x, \alpha) \mapsto x/\alpha$ の形に書く. PTT 代数の場合は左作用は全域的であったが一般のレコード代数の場合は, **両作用とも部分的 (partial) である**ことに注意する. すなわち $z = \beta x + \gamma y$ が存在しても, αz が定義されるとは限らない.

この状況で, 次の条件を満たす 6-組 $\mathcal{R} = (R,G,+,\cdot,/,\epsilon)$ を **G-レコード代数という**. G が明らかな場合は単にレコード代数とよぶ.

(1) $+$ は結合律 $a+(b+c)=(a+b)+c$, 可換律 $(a+b=b+a)$, べき等律 $(a+a=a)$ を満足し, ϵ はこの加法に対する単位元 (零元) である $(a+\epsilon=\epsilon+a=a)$.

(2) G の R への左作用と右作用はともに $+$ に関して分配律を満たす: $(\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b, (a+b)/\alpha=a/\alpha+b/\alpha)$.

(3) 左作用と右作用の間に「簡約律」$(\alpha t)/\alpha=t$ が成り立つ.

(4) α と β が G の順序の意味で上限を持たないときは $\alpha u+\beta v$ は任意の $u,v\in R$ について定義される.

ただしこの公理の各等式は, 左辺の値の存在と右辺の値の存在が同値であることも主張しているものとする. たとえば上の可換律は, $a+b$ が定義されるときおよびそのときに限り $b+a$ も定義され, そのとき両者の値は等しい, と読む.

R, R' を G- レコード代数とする. 関数 $h:R\to R'$ が $h(\epsilon)=\epsilon$, $h(\alpha u)=\alpha h(u)$, $h(u/\alpha)=h(u)/\alpha$, かつ $h(u+v)=h(u)+h(v)$ を満たす時 h を R から R への準同型という. ただし, $u+v$, $\alpha\cdot u$, u/α が R で定義されるならばそれぞれ, $h(u)+h(v)$, $\alpha h(u)$, $h(u)/\alpha$ は R' で定義されなければならない. 関数 h が全単射 (bijection) の場合, R と R' は同型という.

条件 $a\le b$ を, $a+b=b$ なることと定義する. すると, 2 項関係 $\le$ は R の上の半順序関係となることは次のようにしてすぐ分かる. 反射律 $a\le a$ はべき等律 $a+a=a$ から出る. 推移律 ($a\le b$ かつ $b\le c$ ならば $a\le c$ であること) は, $b=a+b$ の両辺に c を加え $c=b+c$ を適用することにより $c=a+c$ を得ることから分かる. 反対称律 ($a\le b$ かつ $b\le a$ ならば $a=b$) はレコード代数の可換律から直ちにでる. すなわち:

命題 1 レコード代数上の 2 項関係 $\le$ は半順序関係である.

R の部分集合 S の $\le$ に関する上限を $\bigsqcup S$ と書く. S の和ともよぶ. S を空でない R の部分集合で, どの二つの要素に対しても和が存在するとき S を両立系という. 任意の両立系が半順序 $\le$ の意味の上限を持ち, さらにアクセスの左作用が両立系の和をとる演算と可換であるとき R を完備という:

$$\alpha(\bigsqcup S)=\bigsqcup\{\alpha s\mid s\in S\}$$

ただし部分代数の等式の読みとして, 左辺が定義されることと, ある $x\in S$ について $\alpha x\in S$ であることの同値性も, この等式の主張に入っている.

$a\sqcup b=\bigsqcup\{a,b\}$ と定義すると次の命題が成り立つ:

命題 2 $a+b=a\sqcup b$

証明: $a\sqcup b$ は定義より a より大きいから $(a\sqcup b)+a=a\sqcup b$ である. 同様にして $a\sqcup b+b=a\sqcup b$. 両辺を加えてべき等律を適用すれば $a\sqcup b+a+b=a\sqcup b$, すなわち, $a+b\le a\sqcup b$ を得る. また, $a+b+a=a+b$ より $a\le a+b$ であり, 同様に $b\le a+b$ である. 従って, $a\sqcup b$ の定義より $a\sqcup b\le a+b$. $\le$ の反対称律より $a+b=a\sqcup b$. **QED**

α を $a\sqcup b=a+b$ の両辺に左作用させると, その分配性から次の命題が得られる:

命題 3 $\alpha(a\sqcup b)=\alpha a\sqcup\alpha b$

命題 4 $\bigsqcup S+\bigsqcup S'=\bigsqcup S\cup S'$

証明: $S\subset S\cup S'$ であるから $\bigsqcup S\le\bigsqcup S\cup S'$ である. 同様に $\bigsqcup S'\le\bigsqcup S\cup S'$. ゆえに $\bigsqcup S+\bigsqcup S'\le\bigsqcup S\cup S'$. 逆に, $S\cup S'$ の任意の元 u に対して, $u\le\bigsqcup S+\bigsqcup S'$ であるから, $\bigsqcup S\cup S'\le\bigsqcup S+\bigsqcup S'$. **QED**.

命題 5 完備レコード代数において, $S=\bigcup\{S_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ ならば, $\bigsqcup S=\bigsqcup\{\bigsqcup S_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$.

証明: $S_\lambda\subset S$ から右辺 $\le$ 左辺がいえる. 逆に, S のどの元もある S_λ に含まれることから左辺 $\le$ 右辺がいえる. **QED**

S を R の部分集合として $G(S)=\{gx\mid x\in S\cup\{\epsilon\},g\in G\}$ とおく. R の任意の元が $G(S)$ のある部分集合の上限として表せるとき, **R は S から生成される**という.

M をマージ系とする. M から R への準同型 φ が存在して, 完備レコード代数 R がその像 $\varphi(M)$ から生成されるとき **R は (M,φ) の上の完備 G- レコード代数**という. φ が明らかなときは, 単に **M の上の完備 G- レコード代数**という.

定義 3 φ を集合 M からレコード代数 R への関数とする．M の任意の元 x,y と，一方が他方の接頭語でない任意の二つのアクセス α, β について $\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$ が存在するとき，φ を安全であるという．

命題 6 M をマージ系，G をアクセス半群とする．そのとき，次の条件 *(1)* と *(2)* を満たす，M の上のレコード代数 R と M から R への準同型 φ が一意的に存在する：

(1) R は (M,φ) の上の完備 G- レコード代数である．

(2) R' が任意のレコード代数で，φ' が M から R' への安全な関数ならば $f\circ\varphi=\varphi'$ となるような R から R' への完備 G- 準同型 f が存在する．

証明: マージ系を M，アクセス半群を G とする (G,M)-PTT 代数を R とおく．$x\in M$ に，そのタグ x 自身を持つ単位木を対応させる M から R への単射を φ とおく．R が (M,φ) の上の完備 G- レコード代数であることは明らかである．$\alpha\varphi(x)$ を $\alpha\varphi'(x)$ に対応させる $G(\varphi(M))$ から $G(\varphi'(M))$ への関数 f' は，φ' が安全であるから，R の両立系を R' の両立系に対応させる．したがって，f' は R から R' への完備 G- レコード準同型 f を決める．$f\circ\varphi=\varphi'$ であることも容易に示される．

一意性は明らかである． **QED**

(G,M)-PTT 代数が M の上の自由完備 G- レコード代数であることが示された．ここで参考のために，レコード代数の集合論的モデルの一例を紹介する：N を自然数全体 $N=\{1,2,\ldots\}$，L をラベルの集合，L^ω をラベルの可算無限列の全体とする：$L^\omega=[N\to D]$．A を非空集合とし，L^ω から A への関数の全体をを D とおく：$D=[L^\omega\to A]$．$a\in L$ を関数 $a:D\to D;\ d\mapsto d'$ と同一視する．ここで，$d'(l)=d(al)$, $(al)(1)$=a, $(al)(n+1)=l(n)$ とする．すると，L^* は D から D 自身への (全域) 関数からなる単位半群となる．もちろん，結合演算は関数合成である．さらに，$S\subset D$ に対して，$\alpha\cdot S=\alpha^{-1}(S)$, $S/\alpha=\alpha(S)=\{\alpha(d)\mid d\in S\}$ と定義する．ここで $(\cdot)^{-1}$ は逆関数を表す．2^D は $\cap$, $\cdot$, $/$ に関して完備レコード代数であることは公理を確かめることにより分かる．この代数の単位元は D である．演算はすべて全域である．M を D の部分集合から成る集合とするとき，M から生成される 2^D の完備部分 L^*- レコード代数を $\overline{M}$ と書く．M が $\cap$ に関して完備のとき，

$$(\overline{M},M,\cap,\cdot,/,\bigcup\overline{M})$$

は「ほとんど」M の上の完備 L^*- レコード代数であることも公理を確かめることより分かる．これは，まだレコード代数にはなっていないが，明快な「準モデル」である．これをレコード代数に仕上げるには，M の各元を互いに交わらないように選び，$\overline{M}$ から空集合を除外し，そして，M の各元を「アトム化」して G の作用で生成された元との間の + 演算が定義されないように微調整を行えばよい．これも困難なく実行できる．

4　単一化理論と充足可能性

4.1　単一化理論

レコードの上の制約理論のため，パラメータを持つレコードの概念を導入しよう．まず，G- レコード代数の直和の概念を定義する．R と S をふたつの G- レコード代数とする．

単一化理論においては，G の順序について次の仮定を置く：**G の任意の元 u, v について，それが G の元で比較不能ならば，u と v の上界は存在しない**．自由単位半群はこの条件を満たしている．この条件を緩めても，計算可能な単一化理論が可能であると予想されるが，まだ詳細検討するに至っていない．

代数系の一般論 (たとえば [弥永・小平 61]) に従って**二つのマージ系の直和およびふたつのレコード代数の直和**を定義する．ここでは，後者のみを示す．

R を M の上の G- レコード代数とする．X をパラメータの集合とする．直観的には，gc あるいは gx の「線形和」をパラメトリックなレコードとして定義したい．ここで $g\in G$, $c\in M$, $x\in X$.

定義 4 R と S をともにマージ系とする．R の元 r と S の元 s の形式和 $r\oplus s$ の全体から成る集合で次の条件を満たす G- レコード代数を R と S の直和とよび $R\oplus S$ と書く．$r,r'\in R,s,s'\in S,\alpha\in G$ とする：

(1) $r\oplus s=r'\oplus s'$ ならば $r=r'$ かつ $s=s'$ である．

(2) $(r\oplus s)+(r'\oplus s')=(r+r')\oplus(s+s')$

(3) $\alpha(r \oplus s) = \alpha r \oplus \alpha s$

(4) $(r \oplus s)/\alpha = (r/\alpha) \oplus s/\alpha$

ここで，たとえば (2) は $r + r'$ が R で，$s + s'$ が S' でともに定義されるときのみ等式が定義されることに注意する．他も同様である．R と S の直和レコード代数は，R と S からの両方からのレコード準同型を持つもので最も普遍的なものとして特徴付けることもできる．

R をマージ系 V の上の完備レコード代数とする．一般性を失うことなく，$V \subset R$ と埋め込まれているとする．X を R と交わらないパラメータの集合とする．$\tilde{X}$ を X から生成される可換べき等自由半群とおく．$\tilde{X}$ の上の完備自由 G- レコード代数と G- レコード代数 R の直和を $R[X]$ と書き，R に X を添加したレコード代数とよぶ．$\tilde{X} \subset R[X]$ かつ $R \subset R[X]$ と埋め込まれているとみなす．

R をマージ系 V の上の完備レコード代数とする．$R[X]$ の元を，**パラメータ付きのレコード**とよぶ．αu の形で表せる $R[X]$ の元を基本元とよぶ．ただし，u は ϵ，または，パラメータ ($\in X$)，または定数タグ ($\in V$) である．

有限個の基本元の和で表されるパラメータ付きのレコードを **PST** (partially specified term) とよぶ．PST の対を (基本) 制約とよぶ．基本制約を $p \bowtie q$ の形に書く．次に制約の公理系を示す．なお，それぞれの規則を (制約) 公理とよぶ．簡単のため，p および q は基本元の和の形で表現されていると仮定する．こうしても，最初に $R[X]$ に置ける分配律を適用すればよいから一般性は失っていない．

制約公理: 以下，x はパラメータを，α, β はアクセスを，u, v, w は $R[X]$ の任意の元を表す．

反射律 $u \bowtie u$.

対称律 $u \bowtie v \Longrightarrow v \bowtie u$.

制限推移律 $x \bowtie u, x \bowtie v \Longrightarrow u \bowtie v$. (制限された推移律．$x$ はパラメータであることに注意．)

基底律 $\alpha r \bowtie \beta s$. α と β が比較不能のときに限る．

マージ律 (1) $u + v \bowtie w \Longrightarrow u \bowtie w$.

マージ律 (2) $u + v \bowtie w \Longrightarrow u \bowtie v$.

簡約律 $\alpha u \bowtie \alpha v \Longrightarrow u \bowtie v$.

規則の読みは次のとおり：左辺に現れる制約が存在するならば右辺の制約も存在しなければならない．上の規則をすべて満たす，基本制約の集合を (R の上の) 制約理論とよぶ．

公理 1 により，この制約理論はパラメータの間の同値関係を与える．しかし，一般の推移律は成り立たないので，$R[X]$ の上の同値関係ではない．公理 5, 6, 7 は与えられたアクセスに対してレコードの下部構造が木構造のとしてユニークに「アクセス」できることを保証している．基本制約の集合 S が与えられたとき，S を含み，かつこれらの公理を満たす最小の制約理論が存在することは規則の形から容易に証明される．これを S の閉包とよぶ．閉包は，S から始めて，公理系の規則を繰り返し適用して，飽和するまで逐次拡張する方法で構成できる．各規則を見ると，この過程において生成される制約の両辺に現れるレコードはすべて $R[X]$ の順序において，S のある元以下であることが分かる．S が有限ならば，(レコード代数 $R[X]$ に作用するアクセス半群は有限と仮定しているので，) 上の拡張手続きは有限ステップで飽和する．u と v を $R[X]$ の元で，$u + v$ が定義されない基本元のとき，$u \bowtie v$ のことを**コンフリクト**とよぶ．コンフリクトを含まない制約理論を **PET**(Partial Equation Theory) とよぶ．単一化アルゴリズムはつぎのとうりである．入力は有限の基本制約の集合

$$C = \{p_1 \bowtie q_1, \ldots, q_n \bowtie q_n\}$$

である．出力は C の閉包 $\overline{C}$ である．ただし $\overline{C}$ がコンフリクトを含めば失敗を出力して停止する．単一化が成功したとき出力 $\overline{C}$ は PET である．単純な飽和法によっても (入力 C が有限のときは，) $\overline{C}$ が有限ステップで計算できることは，規則の形から明らかである．

単一化の例をふたつ示す．$G = \{a, b\}^*$ $(a \neq b)$, $M = \{1, 2\}$ を自明なマージ系とする．すなわち 1+2 は定義されず，$1 + 1 = 1$, $2 + 2 = 2$ である．R を M の上の G- レコード代数とする．$X = \{x, y\}$ をパラメータの集合とする．スペースの節約のため反射律あるいは基底律によって得られる制約などの冗長な制約は省く．また対称律の適用も明示しない．

$$C_1 = \{ax + bx \bowtie by + a1\}$$

とする．マージ律 (1) により $ax \bowtie a1$, $bx \bowtie by$ を得る．このふたつに それぞれ簡約律を適用して $x \bowtie 1$ と $x \bowtie y$ を得る．これらに制限推移律を適用して $y \bowtie 1$ を得る．ゆえに C_1 の閉包は

$$\{ax + bx \bowtie by + a1, ax \bowtie a1, bx \bowtie by, x \bowtie 1, x \bowtie y, y \bowtie 1\}$$

となる．

次にサイクルを持つグラフを表す単一化の例を示す．$R[X]$ を上と同様とする．

$$C_2 = \{x \bowtie ay + by, y \bowtie ax + bx, x \bowtie y\}.$$

パラメータ x に関する制限推移律を適用して $y \bowtie ay + by$ を得る．これと $y \bowtie ax + bx$ に y に関する制限推移律を適用して $ax + bx \bowtie ay + by$ を得る．これにマージ律 (1) を繰り返し適用して $ax \bowtie ay$, $bx \bowtie by$ を得る．それぞれに簡約律を適用してともに $x \bowtie y$ を得る．これでもはや適用できる規則はない．C_2 の閉包は

$$\{x \bowtie ay + by, y \bowtie ax + bx, x \bowtie y, ax \bowtie ay, bx \bowtie by, x \bowtie ax + bx, y \bowtie ay + by\}$$

である．この結果は，唯一のノードとふたつの自己ループの枝 a と b からなるグラフを表していると解釈できる．

4.2 充足可能性

$G, V, R, X, R[X]$ は上のとおりとする．パラメータの集合 X から R への部分関数を割当て (assignment) と言う．割当ては，$R[X]$ から R への G- 部分準同型に拡張できるので，それらは同一視する．レコード代数と割当てと制約の間の 3 項関係 $\models$ を定義する．f を割当て，C を制約とする．

定義 5 *PST* p, 割当て f, レコード t が次の条件を満たすとき，t は *(*f *の下で)* p **のインスタンスである**といい，$t, f : p$ と書く*:* x をパラメータ，α をアクセスとして，$\alpha x \leq p$ ならば $f(x) = t/\!\!/\alpha$ である．

定義 6 (充足可能性) すべての $p \bowtie q \in C$ について，次の条件が成り立つとき，$R, f \models C$ が成り立つと定義する*:*

(1) $f(p + q)$ が定義されている．すなわち値がを持つ．

(2) $\alpha x \leq p + q$ ならば，$f(p+q)/\!\!/\alpha = f(x)$．ただし，$x$ はパラメータまたは定数とし，α はアクセスとする．すなわち，$f(p+q)$, f: $p + q$ のことである．

条件 (1) のみでは，後ほど必要となる単一化可能性との同値性が出て来ないので，条件 (2) では，さらに「十分大きい」割当てであることを要求している．

$R, f \models C$ は，R **において** f **は** C **を充足する**と読む．あるいは，f は C の解であるともいう．例をひとつ挙げよう．$x \in X$ をパラメータとして，制約 $ad1 + bd2 \bowtie ax + bx$ はどのような割当てによっても充足されない，つまり解を持たないことを証明しよう: もし，解 f が存在すれば充足可能性の定義の条件 (2) から，$f(ad1 + bd2 + ax + bx)/\!\!/a = f(x)$ かつ，$f(ad1 + bd2 + ax + bx)/\!\!/b = f(x)$ でなければならない．アクセスの左作用分配律を適用することにより，$d1 \leq f(x)$ かつ $d2 \leq f(x)$ を得る．両辺を d で「割って」$1 \leq f(x)/\!\!/d$, かつ $2 \leq f(x)/\!\!/d$ を得る．しかるに，異なる定数タグ同士の和 $1 + 2$ は定義されないから，これは不可能である．

しかしながら，代入 $x \mapsto c3$ を適用して得られる式 $ad1 + bd2 \bowtie ac3 + bc3$ は，レコード代数 R の元の間の関係式としては正しい．

制約公理系の他に，次の展開公理:

$$x \bowtie \alpha y,\ y \bowtie \beta z \Longrightarrow x \bowtie \alpha\beta z$$

を加えても制約の閉包の概念は同様に定義できる．区別するために，これを**拡張閉包**とよぶ．与えられた制約が有限でも，拡張閉包は一般に無限集合になるので，アルゴリズムの議論はできない．しかし，両閉包は，同一の解の集合を持つ．

定義 7 $R[X]$ の元から成る両立系 S に対して次の条件を満たす割当て f が存在するとき，S を**マージ可能系**とよぶ*:*

(1) $\{f(u) \mid u \in S\}$ が和を持つ.

(2) $u \in S$ かつ $\alpha x \leq \exists v \in S$ かつ $f(u)/\alpha$ が存在するならば, $f(u)/\alpha \leq f(x)$.

ただし, x,y はパラメータ, u は任意のレコード, α はアクセスを表す. このとき f を S の**マージ解**とよぶ.

まず, f が $u \bowtie v$ の解であることと, f が $\{u,v\}$ のマージ解であることは同値であることは定義から直ぐ分かる.

次に, f が S のマージ解, αx が S の基本元ならば 簡単な計算で, $f(x) = (\bigsqcup f(S))/\alpha$ であることが分かる. またこれから直ちに次が出る: αx と $\alpha\beta y$ が S の元ならば, $f(x)/\beta = f(y)$ である.

逆に E が PET で f が割当でありかつ, $x \bowtie \beta y \in E$ なる任意の基本制約に対して $f(x)/\beta = f(y)$ が成り立つならば, f は, $u \bowtie v \in E$ なる任意の対 $\{u,v\}$ のマージ解であることが次のようにして証明できる: 記号 x, y, z はパラメータ, α, β, γ, δ はアクセスとする. $u \bowtie v \in E$ とおく. $\alpha x \leq u+v$ とする. $\alpha\beta y \leq u+v$ と仮定する. PET の定義と f についての仮定から $f(x)/\beta = f(y)$ である. これから, $f(\alpha\beta y) \leq f(\alpha x)$ がいえる. 次に, $\gamma\delta = \alpha$ かつ $\gamma z \leq u+v$ と仮定する. 上と同じく, PET の定義と f の仮定から, $f(x) = f(z)/\delta$ である. レコード代数の簡約公理および, レコード準同型が半群作用と交換可能であることを使って, $f(z) = (\gamma f(z))/\gamma = f(\gamma z)/\gamma$ を得る. これから, $f(z)/\delta = (f(\gamma z)/\gamma)\delta = f(\gamma z)/\alpha$ である. ゆえに, $f(x) = f(\gamma z)/\alpha$ を得る. 両辺に α を左から作用させることにより, $f(\alpha x) = \alpha(f(\gamma z)/\alpha)$ を得る. $f(w)/\alpha$ が定義されかつ $w \leq u+v$ なる基本元 w は, 上の $\alpha\beta y$ か γz の形のいずれか限ることに注意すると, 先に得た式と併せて, $\alpha f(x) \geq \alpha(f(w)/\alpha)$ を得る. すなわち, $f(x) \geq f(w)/\alpha$ を得る. したがって, 解の定義により, f は $u \bowtie v \in S$ の解である. $u \bowtie v \in E$ は任意であったから, f は E を充足する. まとめると:

補題 1 *PET E に関する次の条件 (1) と (2) は同値である:*

(1) E が充足可能である.

(2) 割当て f が存在して, 任意のタグ x,y について $x \bowtie \alpha y \subset E$ ならば $f(x)/\alpha = f(y)$.

この補題を用いて次の基本定理を証明する.

定理 7 (解補題) R が完備なレコード代数のとき, $R[X]$ 上の *PET* は充足可能である.

証明: S の拡張閉包を C とする. C と S の解の集合は一致するから, C が充足されることをいえばよい.

x をパラメータ, u をタグ成分がパラメータでない C の基本元, $x \bowtie u$ が C の元とする. D_x をそのような基本元 u の全体集合とおく. C が PET の拡張閉包であるから, D_x はコンフリクトを含まない. ただし, D_x が空集合であるような x については, 便宜上, $D_x = \{\epsilon\}$ と規約する.

x と y をパラメータとして, $\alpha x \bowtie y$ を C の基本制約とする. $D_x = D_y/\alpha$ であることを証明しよう. u を D_x の要素とする. D_x の定義により, $x \bowtie u$ は C の要素である. $y \bowtie \alpha x$ に展開公理を適用すると, $y \bowtie \alpha u$ が C の要素である. ゆえに u は D_y/α の元である. 逆に, u を D_y/α の元とする. すなわち, $y \bowtie \alpha u$ は C に含まれる. $y \bowtie \alpha x$ が C の要素であるから, 制約公理をいくつか適用して $x \bowtie u$ が C の要素であることが導ける. すなわち, u は D_x の要素である. よって $D_x = D_y/\alpha$ が言えた. 一般に $f(x) = \bigsqcup D_x$ とおくと, レコード代数の完備性を仮定しているので, $f(x) = f(y)/\alpha$ である. すなわち, 割当て f は 制約 C を充足している. **QED**

この定理の自明な系として, 単一化可能性と充足可能性の同値性がでる:

定理 8 (単一化定理) 次の二つの条件は同値である:

(1) p と q は単一化可能である.

(2) 制約 $p \bowtie q$ は充足可能である.

S を制約とする. S の閉包は S のすべての有限部分集合の閉包の和集合と一致することは, 容易に分かる. これから直ちに**コンパクト性定理**が成り立つ.

定理 9 (コンパクト性) すべての有限部分集合が充足可能な制約は, それ自身充足可能である.

5 プログラムの意味論

$R[X]$ を固定する．**プログラム節**とは PST p と PST の有限集合 B の対 (p, B) の対である．**プログラム** P とは，プログラム節の有限集合である．**ゴール**とは PST からなる空でない有限の集合である．プログラム節 $(p, \{p_1, ..., p_n\})$ $(n \neq 0)$ は次のように書かれる：

$$p \leftarrow p_1, ..., p_n.$$

プログラム節 (p, ϕ) は次のように書かれる：

$$p.$$

ゴール G と PET E の対 (G, E) を（計算）状態と呼ぶ．本節では以下，ひとつのプログラムを固定する．

定義 8 次の条件を満たす，ふたつの状態 (G, E) と (G', E') の順序対を**融合** *(resolution)* **ステップ**とよび，$(G, E) \to (G', E')$，と書く．ただし，$G = \{p_1, ..., p_n\}$ とする；

(1) n 個のプログラム節のコピー $q_i \leftarrow q_1^i, ..., q_{k_i}^i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して，$G' = \{q_1^1, ..., q_{k_1}^1, ..., q_1^n, ..., q_{k_n}^n\}$ である．

(2) E' は $\{p_1 \bowtie q_1, ..., p_n \bowtie q_n\} \cup E$ の閉包である．

制約 $\{p_1 \bowtie q_1, ..., p_n \bowtie q_n\}$ をこの**融合ステップの制約**という．

隣り合う状態の対がすべて 融合ステップであるような，高々可算個数の状態から成る列を**計算**とよぶ．計算が無限の融合ステップを含むか，または最後の状態のゴールが空のときこの計算は**成功である**という．ゴール成分が空でない状態で終わり，しかもそれ以上に延長することのできない有限の計算は**失敗である**という．

定義 9 (モデル) PTT の非空集合 M は，その任意の元 t に対してある，プログラム節 $p \leftarrow p_1, \cdots, p_n$ と割当て f が存在して次の条件を満たすとき，与えられた**プログラムのモデル**という：

(1) $t, f : p$，すなわち，t は p のインスタンス．

(2) $t_i, f : p_i$ なる M の元 t_i が存在する．$(1 \leq i \leq n)$

M と M' がモデルならば $M \cup M'$ もモデルである．ゆえに最大モデルが存在する．これを**プログラムの意味**と定義する（最大意味論）．以後これを単にモデルという．

ゴール G がモデル M の中に割当て f の下で**成就される**とは，G の各要素が M の中に f の下で，あるインスタンスを持つことと定義する．

f と f' を，一般に，ある半順序構造 $(P, \leq)$ に値をとる部分関数とし，任意の x について，$f(x)$ が定義されるならば $f'(x)$ も定義され，かつ $f(x) \leq f'(x)$ のとき，f' は f の**拡張**であるという．

補題 2 (融合ステップ定理) G が E の解 f の下で成就されるならば，融合ステップ $(G, E) \to (G', E')$ が存在して，f を E' のある解 f' に拡張でき，G' は f' の下でモデルの中に成就される．

証明：p を G の要素とする．仮定より，p はモデルの中に f の下でインスタンスを持つ．すると，プログラムのモデルの定義により，プログラム節のコピー D_p が存在して，そのボディは f の下でモデルの中で成就される．C はこの融合ステップの制約とする．G' を集合系 D_p $(p \in G)$ の和と置き，E' を $C \cup E$ の閉包とおく．f のある拡張が C と E の両方を満たすから，単一化定理により，E' は PET である．　**QED**

ひとつの計算の状態成分として現れる PET のすべての和集合は，PET の単調増加列の和集合であることから，PET となることが分かる．これを**計算の PET** とよぶ．有限ステップの計算の PET は最後の状態の PET と一致する．

ゴール G をもつ状態から始まる計算を G の計算という．

定理 10 (健全性) G の計算 Γ が成功であれば，G は Γ の PET の任意の解の下でモデルの中に成就される．

証明：

G の計算 Γ が成功であるとする．E を Γ の PET とおき，f を E の任意解とする．G の各元 p について $f(p)$ は，モデルの要素であることの定義条件を満たしていることは容易にチェックできるから，p は f の下でインスタンス $f(p)$ を モデル M の中に持つ．　**QED**

融合ステップ定理を繰りかえすことにより次の完全性定理が証明できる．

定理 11 (完全性) ゴール G が, ある割当て f の下でモデルの中に成就されるならば, G の成功計算 Γ が存在して, f は Γ の PET のある解に拡張可能である.

割当ての定義域は, 文脈に応じてパラメータから成る十分大きな集合であるとする.

補題 3 (持ち上げ補題) $(G,E) \to (G',E')$ を融合ステップ, F を $sol(E) \subset sol(F)$ なる PET とする. (ここで, $sol(D)$ は D の解の全体集合を示す.) このとき, ある PET F' と融合ステップ $(G,F) \to (G',F')$ が存在して, しかも $sol(E') \subset sol(F')$ である.

証明: C を融合ステップ $(G,E) \to (G',E')$ の制約とする. すると E' は $C \cup E$ の閉包 PET である. F' を $C \cup F$ の閉包とおく. $sol(E) \subset sol(F)$ であるから, F' は空ではなく, したがって PET である. $sol(E') \subset sol(F')$ も融合ステップと解の両定義から明らかである. **QED**

Γ を状態 (G,E) からの成功計算とする. Γ' を状態 (G,ϕ) から, 持ち上げ補題を繰り返すことにより得られる成功計算とする. (H,D) と (H,D') をそれぞれ Γ と Γ' の対応する状態とする. すると帰納法により, D は $E \cup D'$ の閉包であることが証明できる. Γ' を Γ の持ち上げという.

定義 10 パラメータの集合 V は PET E において自由であるとは, 次の条件をみたすことである: $x \in V$ かつ $x \bowtie u \in E$ ならば u は V の元ではないパラメータである.

定理 12 (解表示定理) G が E のすべての解の下でモデルの中に成就すると仮定する. さらに, G に現われるパラメータのみが, E の制約の左辺または右辺となっているとする. すると (G,ϕ) から始まるある成功計算が存在して, E の解はすべてその計算の PET のある解に拡張できる.

証明: E のみに現れて G には現れないパラメータの全体集合を V とおく. さて, 簡単のため, 十分多くの定数タグが存在すると仮定する. そして G にもプログラムにも現れない定数タグを各 $x \in V$ に応じて導入する. $x \in V$ に対して導入された定数タグを c_x で示す. $c_x \neq c_y (x \neq y)$ とする. C を $\{x \bowtie c_x \mid x \in V\}$ の反射閉包とおく. すると仮定により $E' = C \cup E$ も PET であり, 完全性定理より (G,E') から始まる成功計算 Γ が存在する. すると, 持ち上げ補題により (G,E) から始まる成功計算 Γ' が存在する. さらに, この Γ' に再び持ち上げ補題を適用して (G,ϕ) から始まる成功計算 Γ'' が存在する. 一般に計算 Δ の PET を P_Δ と書けば, 上述の注意から $P_{\Gamma'}$ が $E \cup \Gamma''$ の閉包で, かつ P_Γ が $C \cup P_{\Gamma'}$ の閉包であるように Γ' と Γ'' を構成できる.

$E \cup P_{\Gamma''}$ の閉包が PET であることから, 本定理の証明は V が $P_{\Gamma''}$ において自由であることをいえば十分である. すなわち, 次をいえばよい: $x \in V$, $x \bowtie u \in P_{\Gamma''}$, $x \neq u$ ならば u は V には含まれないパラメータである. そのためには, $C \cup P_{\Gamma''}$ の閉包が PET になることをいえば十分である. 実際, $C \cup E \cup P_{\Gamma''}$ の閉包が PET であるから $C \cup P_{\Gamma''}$ の閉包は PET である. **QED.**

定理 13 (NAF の健全性) (G,ϕ) から始まる成功計算が存在しなければ, どんな割り当ての下でもゴールをモデルの中に成就することはできない.

証明: 健全性定理の対偶である. **QED**

定理 14 (NAF の完全性) どんな割り当ての下でもゴ-ル G をモデルの中に成就できないならば (G,ϕ) から始まる成功計算は存在しない.

証明: 完全性定理の対偶である. **QED**

NAF の完全性と健全性の証明がこのように自明になった理由は, 最大モデル意味論をとったために, 無限に続く計算が有意味になったからである. 通常の Herbrand モデルでは, 最小モデル意味論なので無限計算は意味がないと定義される.

6 DAG, 次数 および限定節文法

6.1 DAG

DAG D を 7-組で表す: $D = (N,A,W,L,f,g,s)$. ここで N は節点の集合, A は矢の集合 ($N \times N$ の部分集合), W はタグの集合, L は矢のラベルの集合, f は N から W への部分関数, g は A から L への関数, s はスタート節点である.

R を W の上の自由完備 L^*- レコード代数とする. 一般性を失うことなく R と N は交わらないと仮定できる. D に対して, C を次の (1) と (2) を満たす最小の集合と定義する:

(1) $(x,y) \in A$ かつ $g((x,y)) = a$ ならば $x \bowtie ay \in C$

(2) $f(x) = c$ ならば $x \bowtie c \in C$

$C \subset R[N] \times R[N]$ と見なせるから，C は制約問題のインスタンスである．すなわち，DAG D **はレコード代数の単一化制約のひとつの問題 (インスタンス) とみることができる**．さらに，$D_i = (N_i, A_i, W_i, L_i, f_i, g_i, s_i)$ $(i = 1, 2)$ をふたつの DAG とする．D_1 と D_2 のグラン・マージは合成単一化問題 $\{s_1 \bowtie s_2\} \cup C_1 \cup C_2$ を表していると解釈される．このようにして，DAG の上の単一化文法理論の意味論を，本稿の意味論から誘導できることは明らかであろう．実際，この意味論は，Shieber 他 [86] にみる限り，DAG ベースの単一化文法理論の実際を捉えていると考えられる．

6.2 次数 (arity) の導入

G をアクセス半群とする．$\alpha\beta \in H$ ならば $\alpha \in H$ となる G の部分集合 H をソートとよぶ．H から単位元を除いて得られる集合の極小元の個数をソート H の次数とよぶ．任意の異なる二つのソートが単位元を除いて共通元を持たないようにかつ，任意の G の元はどれかのソートの元であるようなソート系が与えられた半群をソートされた半群とよぶ．

レコード代数 R は，ふたつの基本元 αx と βy の和が定義されるのは，α と β が同じ G のソートに含まれるときに限るとき，R **をソートされたレコード代数とよぶ**．

関数記号の集合 F で生成される Herbrand 項全体 U はつぎのようにして，ソート付きのレコード代数の極大元の全体集合とみることができる：各関数記号 $f \in F$ に付いてラベル集合 $ARG_f^i (1 \leq i \leq n_f)$ を導入する．ここで，$n_f \geq 0$ は f の次数である．これらのラベル全体を L_F とおき，L_F により生成される自由単位半群を G とおく．$S_f = \{単位元\} \cup \{ARG_f^i \alpha \mid 1 \leq i \leq n_f, \alpha \in G\}$ とおくと，G はソート系 $S_f (f \in F)$ により，ソートされた半群である．すべての定数記号からなる集合をタグ集合 W とすると，G と W から生成されるレコード代数 R の極大元の全体集合は U と同一視できる．

R の元を表現する構文的オブジェクトとしての項の概念とその翻訳規則を導入する．これは，すぐ下の限定節文法の再定義のための準備である．

定義 11 D を次の条件を満たす最小の集合とし，D の元を項とよぶ：

(1) すべての定数記号とパラメータを含み，

(2) $a_1, \ldots, a_n$ がラベルで，$p_1, \ldots, p_n$ が D の元ならば，対の集合 $\{a_1/p_1, \ldots, a_n/p_n\}$ も D の元であり，

(3) f の次数を n として，$f(p_1, \ldots, p_n)$ も D の元である．

定義 12 項から $R[X]$ の元への翻訳規則 h は，D から，$R[X]$ への (部分) 関数 h として次の条件で定義する：

(1) c が定数ならば $f(c) = c$, x がパラメータならば $f(x) = x$,

(2) $h(\{a_1/p_1, \ldots, a_n/p_n\}) = a_1 h(p_1) + \cdots + a_n h(p_n)$,

(3) $h(f(p_1, \ldots, p_n)) = ARG_f^1 h(p_1) + \cdots + ARG_f^n h(p_n)$

この定義からすぐ分かるように，翻訳 h は D のすべての元に定義されるとは限らない．

6.3 レコードの上の限定節文法

レコード代数理論の応用として，エルブラン領域上の限定節文法 (DCG) を拡張してレコード領域上の限定節文法を定義する．

R をソート付きのレコード代数とする．F を関数記号の集合とし，次数 0 の関数記号の全体集合を W とする：$W \subset F$．次の形の規則の有限集合を文法とよぶ：

$$p_0 \leftarrow q_1 = r_1, \ldots, q_m = r_m \mid p_1, \ldots, p_n.$$

ここで，p_i, q_j, r_j は $R[X]$ の要素であり，$n \geq 0$ かつ $m \geq 0$ である．規則の右辺の左半分 $q_1 = r_1, \ldots, q_m = r_m$ は制約 $\{q_1 \bowtie r_1, \ldots, q_m \bowtie r_m\}$ を表す．

与えられた DCG は，プログラムの意味論と同様に，次の性質を持つ R の最大の部分集合を示すものと定義される：任意の M の元 t に対してある規則 $p \rightarrow C \mid Q$ とある割り当て f が存在して，t は f の下で p のインスタンスであり，f は制約 C を充足し，Q のすべての要素についても f の下で M の中でインスタンスを持つ．

同様に，DCG の手続き的意味論を，プログラムの場合における融合ステップの制約の定義のみを次のように書き換えて定義する．

定義 13 次の条件を満たす，ふたつの状態 (G, E) の (G', E') 順序対を**融合** *(resolution)* **ステップ**とよび，$(G, E) \rightarrow (G', E')$，と書く．ここで，$G = \{p_1, ..., p_n\}$ とする．

(1) n 個のプログラム節のコピー $q_i \leftarrow C_i \mid q_1^i, ..., q_{k_i}^i$ *(*$1 \leq i \leq n$*)* が存在して，$G' = \{q_1^1, ..., q_{k_1}^1, ..., q_1^n, ..., q_{k_n}^n\}$ と書ける．

(2) E' は $\{p_1 \bowtie q_1, ..., p_n \bowtie q_n\} \cup E \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ の閉包．

制約 $\{p_1 \bowtie q_1, ..., p_n \bowtie q_n\} \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ を この**融合ステップの制約**という．DCG の意味論の健全性と完全性の議論は，プログラムの意味論の場合と全く同様な性質が得られる

最後に，記述例として，DCG のインタプリタと，極く簡単な DCG 文法の例を，単純化して示す．infix 法などの通常の Prolog の記法も使っている．ユニット節 (2) と (3) は語彙項目を定義している．(1) のボディ部の記号 = は単一化の組み込み制約 $\bowtie$ を表す．

```
(1) {cat/s, head/H}<-  H={subject/H1} |
        {cat/np, head/H1},
        {cat/vp, head/H},
(2) lex(jack, {cat/np, head/jack}).
(3) lex(runs, {cat/vp, head/{subject/X,
                             pred/run(X)}}).
```

節 (4) から (8) は文法の簡単なインタプリタの記述である．

```
(4) parse([X|Y]-Y, F)<- lex(X, F).
(5) parse(X-Y, (A, B))<-
        parse(X-Z, A),
        parse(Z-Y, B).
(6) parse(X-Y, F)<-
        (F<-B),
        parse(X-Y, B).
```

次は，この文法の実行例である．

```
?-parse([jack, runs]-[], F).

F={cat/s,{head/{subject/jack, pred/run(jack)}}}.
```

7 おわりに

アクセス半群のレコード代数への左作用を部分的としたが，本稿の範囲では特にそれが本質的に効いてくる場面はなかった．それにもかかわらず部分作用とした理由は，アクセス半群の元の「因数分解」が一意的でない場合に理論を展開するための余地を残すためである．とくにアクセス半群の生成元の間の基本関係が DAG として表現できる場合に関心がある．それに関連して，単一化理論においては，その計算可能性のためにアクセス半群 G の順序について次の強い仮定を置いた：**G の任意の元 u, v について，それが G の順序の意味で比較不能ならば,u と v の上界は存在しない．** この条件を緩めることにより，単一化理論の新クラスが発見される可能性もある．これらの検討は，今後の課題である．

謝辞

J.A. Goguen 博士および J-L. Lassez 博士また古川康一 博士からの示唆は本研究にとって有益でした．また，本研究の母胎であるプログラミング言語 CIL 開発グループおける同僚との討論も励みになりました．同僚の安川秀樹氏と橋田浩一博士には，原稿を読んでコメントをいただきました．

改訂版の謝辞: 日本ソフトウェア科学会論文誌に投稿の際，査読者 (複数) から幾つかの記号の誤り等を指摘していただきました．本改訂版はその結果を反映させています．

References

[**Aczel 88**] P. Aczel: Non-well-founded sets, CSLI lecture note series, 1988.

[**Aït-Kaci 84**] H. Aït-Kaci: *A Lattice Theoretic Approach to Computation Based on a Calculus of Partially Ordered Type Structures,* a dissertation in computer and information science, University of Pennsylvania, 1984.

[**Barwise and Perry 83**] J. Barwise and J. Perry : *Situations and Attitudes,* MIT Press, 1983.

[**Barwise 85**] J. Barwise: *The Situation in Logic-III: Situations, Sets and the Axiom of Foundation,* Center for the Study of Language and and Information, CSLI-85-26, 1985.

[**Chikayama 84**] T. Chikayama: *ESP Reference Manual,* ICOT technical report TR-044, 1984.

[**Colmerauer 82**] A. Colmerauer: *Prolog II: Reference Manual and Theoretical Model,* Internal Report, Groupe Intelligence Artificielle, Université d'Aix-Marseille II, 1982.

[**Courcelle 83**] B. Courcelle: *Fundamental Properties of Infinitetrees,* Theoretical Computer Science 25(1983)95-169, 1983.

[**Goguen and Meseguer 85**] J.A. Goguen and J. Meseguer: *Order-Sorted Algebra I: Partial and Overloaded Operators, Errors and Inheritance,* SRI International and CSLI, 1985.

[**Jaffar and Lassez 84**] J. Jaffar and J-L. Lassez: *Constraint Logic Programming,* IBM Thomas J. Watson Research Center, 1986.

[**Kasper and Rounds 86**] R.T. Kasper and W.C. Rounds: *A Logical Semantics for Features,* Association for Computational Linguistics 1986.

[**Lloyd 84**] J.W. Lloyd: *Foundations of Logic Programming,* Springer- Verlag, 1984.

[**Maher 88**] M. Maher: Complete Axiomatizations of the Algebras of Finite, Rational and Infinite Trees, draft, 1988.

[**Mukai 85**] K. Mukai: *Horn Clause Logic with Parameterized Types for Situation Semantics Programming,* ICOT technical report TR-101, 1985.

[**Mukai 87**] K. Mukai: Anadic Tuples in Prolog, ICOT technical report TR-239, 1987.

[**Mukai 88**] K. Mukai: Partially Specified Term in Logic Programming for Linguistic Analysis, FGCS'88, Tokyo, 1988.

[**Mukai and Yasukawa 85**] K. Mukai, and H. Yasukawa: *Complex Indeterminates in Prolog and Its Application to Discourse Models,* New Generation Computing, 3(1985) Ohmusha, Ltd. and Springer-Verlag, 1985.

[**Pereira and Shieber 84**] F.C.N. Pereira and S.M. Shieber: *The Semantics of Grammar Formalisms Seen as Computer Languages,* in the Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Linguistics, Stanford University, California, 1984.

[**Pereira and Warren 80**] F.C.N. Pereira and D.H.D. Warren: *Definite Clause Grammars for Language Analysis - A Survey of the Formalism and a Comparison with Augmented Transition Networks,* Artificial Intelligence 13:231-278, 1980.

[**Pollard 85**] Carl J. Pollard: *Toward Anadic Situation Semantics* , (manuscript), Stanford University 1985.

[Shieber et al 86] S.M. Shieber, F.C.N. Pereira, L. Karttunen, and M. Kay: *A Compilation of Papers on Unification-based Grammar Formalisms Parts I and II,* Report No. CSLI-86-48, April, 1986.

[Smolka 88] G. Smolka: A Feature Logic with Subsorts, LILOG–Report 33, IBM Deutschland GmbH, May 1988.

[弥永・小平] 弥永昌吉・小平邦彦: 現代数学概説 (I), 岩波書店, 1961.