

TM-1053

並列処理マシン上での
シミュレーテッド・アニーリング

荒木 均、館野 峰夫、加藤 等
間藤 隆一（松下）

May, 1991

© 1991, ICOT

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03)3456-3191~5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

並列処理マシン上でのシミュレーティッド・アニーリング

荒木均 館野峰夫 加藤等 間藤隆一
松下電器産業株式会社 情報通信東京研究所

1 はじめに

ICOT の後期の委託研究において、我々は組合せ最適化問題を効率的に解くために、シミュレーティッド・アニーリング (SA) 法へのヒューリスティックな知識の導入と SA 法の並列化を研究している。

平成元年度の並列 SA 法は、状態を表現しているデータを分割して各プロセッサ・エレメント (PE) に割り当て、各 PE で並列に SA を行なう方法であった。この方法を論理アーキテクチャ設計問題に適用し、データの分割数が少なければ、通常の SA 法と比べて短時間で準最適解を生成することを確認した。しかし、状態を表現しているデータの分割数には限界があり、それ以上に分割すると、準最適解を見つけることができなかった。すなわち、分割した場合、各部で全体のコストを正確に知ることができないことが大きな原因である。

そこで、平成二年度は、各種の組合せ最適化問題に適用できるように、状態を複数の PE に一つずつ割り当て並列に SA を行なう方法を提案する。本手法は、二つの特徴を持ち、一つはコストの分布から各温度での定常状態を判断することである。もう一つは、アニーリングの過程で極小解に陥ってしまった PE だけが他の PE が持つ状態を受信し、その状態からアニーリングを開始することである。

本手法を 16PE のマルチ PSI 上で論理アーキテクチャ設計問題を例に採り、通常の SA 法と比較実験を行なった。その結果、約 1/10 の処理時間で同程度の解を得られることを確認した。

2 SA 法

SA 法 [Kirkpatrick 83] は、物理現象である焼きなましを計算機上で模擬することにより、エネルギー (コスト) 最小の状態を求める手法であり、各種組合せ最適化問題に適用可能な最適化アルゴリズムの一つである。そのアルゴリズムを以下に示す [木村 90]。

SA 法は適当な初期状態 s_0 から出発し、状態 $\{s_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を次のように順に生成し、コスト最小の状態 (最適解) に近づけていく。まず、 s_n に微小変形を施した s'_n を生成し、コストの差 $\Delta c = c(s'_n) - c(s_n)$ を計算する。 $\Delta c \leq 0$ ならば、 $s_{n+1} = s'_n$ とし、 $\Delta c > 0$ ならば、 $p = \exp(-\Delta c/T)$ として、確率 p で $s_{n+1} = s'_n$ 、確率 $1-p$ で $s_{n+1} = s_n$ とする。ここで T は温度パラメータと呼ばれ、変換回数 n に依存して、高温から低温に徐々に変化させる。これをクーリング・スケジュールと呼び、温度一定で一定回数変換を繰り返して、 T を段階的に下げていくのが一般的である。これは最も単純なクーリング・スケジュールであるが、比較的良好な結果をもたらすことが知られている [Kirkpatrick 83]。

温度一定の時、SA はエネルギー平衡の状態に向かう統計熱力学的な系の挙動としてとらえることができ、無限回変換を繰り返すと、どのような状態から出発しても、状態 i となる

確率が $\pi_i(T)$

$$\pi_i(T) = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{c_i}{T}\right), \quad (1)$$

$$Z(T) = \sum_{i \in S} \exp\left(-\frac{c_i}{T}\right).$$

である定常確率分布 $\pi(T)$ に漸近的に近づく (ただし、 c_i は状態 i のコスト)。そのため、温度 T をうまく制御することにより、コストの局所的最小値を脱出して大域的最小値に収束することができる (図 1 参照)。この収束過程は、大きく次の三段階にわかれると考えられ、各段階は明確な境界を持つものではなく、段階の移行は徐々に行なわれる [山下 89]。

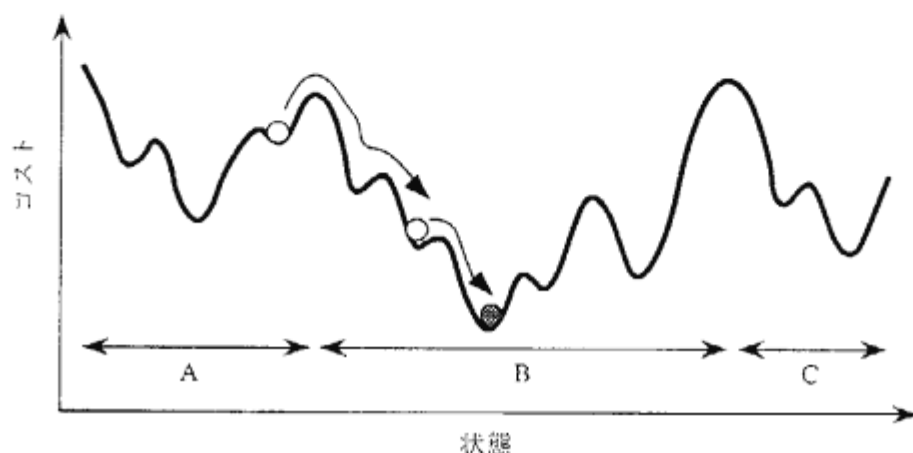


図 1: SA の収束過程

- 高温部

十分大きな温度では、SA はランダムウォークのようにふるまう。そのため、図 1 の大きなコスト障壁も簡単に越えることができ、自由に遷移することができる。したがって、高温での定常確率分布 $\pi(T)$ は一様分布に近く、変換回数を多くしてもあまり意味はない。

- 中温部

アニーリングが進み、温度が徐々に下がってくると、やがて、大きなコスト障壁を越えることは困難になってきて、図 1 の大きな谷 (例えば、A, B, C) のどこかに落ち込んでいく。これは、式 (1) で示される定常確率 $\pi_i(T)$ に差が生じ、コストの高い状態になる確率が小さくなるためである。この $\pi_i(T)$ に差が生じてくる中温部が収束状態を決定する最も重要な段階である。したがって、この中温部に最も多くの変換を施し、慎重に収束先の状態を決定することが必要である。

- 低温部

低温部では、多くの変換がリジェクトされてしまい、状態の大きな変化は望めなくなる。すなわち、図 1 の大きな谷から、飛び出すことはもはや不可能になってきて、大域的最小値へと収束していく。逆に、中温部で十分な回数変換が行なわれていないと、局所的最小値に収束してしまう。

上記のような収束過程から、SA 法は最適解を見つける可能性を持っているが、多大な計算時間を要することが問題であった。そこで、SA 法を並列化して、高速化するという研究が盛んに行なわれている。

その中でも、状態を表現しているデータを分割して各 PE に割り当て、各 PE で並列に各部の変換を行なう方法が最も良く研究されている [Rose 86][Casotto 87]。この方法は、各 PE で正確なコストを知ることができないため、分割された各部の依存関係が大きい場合には、得られる解が極小解になってしまうことが問題となっている。

また、各温度での変換の開始時に、各 PE に同じ状態を一つずつ割り当て並列に変換を繰り返す、次の温度では、全 PE の中でコストが最も小さい状態を各 PE に割り当て変換を繰り返す方法も提案されている [Aarts 89]。しかし、この方法で得られる解は、PE 間の通信を行わずに各 PE で独立に SA を行ない、最終的に得られる各 PE の解の中で最もコストが小さいものほとんど差がないと言われている [Aarts 89]。

これらの方法以外にも、各 PE に同じ状態を割り当て並列に変換を行ない、最初に新しい状態を受信することができた PE が他の PE にその状態を送信し、再び複数の PE が同じ状態に対して変換を繰り返す方法もある [Aarts 86]。この方法は、高温では状態の受理率が高いので、実行効率が低下してしまう。そこで、同じ状態に対して変換を行なう PE 数を、温度の低下とともに徐々に増加していくことにより、実行効率をあげている。しかし、疎結合型の並列計算機では通信コストが大きいので、この方法を適用することは処理速度の低下になると考えられる。

これらの並列方法に対して、本手法では、状態を各 PE に一つずつ割り当て並列に SA を行ない、アニーリング過程で極小解に陥ってしまった判断される PE についてのみ、他の PE が持つ状態を受信する手法を提案する。これにより、コストが小さくなりそうな状態の近傍を複数の PE で探索することができる。また、高温では定常状態に達したかどうかを各 PE のコストから判断し、変換回数を削減する方法も同時にとり入れている。

3 並列 SA 法

上で述べた SA の定性的な収束過程から、高温部では変換回数を多くする必要はないが、中低温部で変換回数が少ないと、図 1 の大域的最小値には収束せず、局所的最小値に落ち込んでしまう可能性がある。この可能性は変換回数が少なければ少ないほど大きくなる。そこで、高温では、PE のコスト分布から定常状態を判断することにより変換回数を削減し、中低温では、アニーリングの過程で見つかったコストが小さい状態の近傍を複数の PE で探索する以下のような手法を考える。

まず、各 PE に状態を一つずつ割り当て並列にアニーリングを開始する。高温部ではアニーリングを始める前に、コストの大小により PE を大きいコストを持つグループと小さいコストを持つグループに二分する。そして、一定温度でのアニーリングの過程で二つのグループのコスト分布に違いがなくなれば、その温度での定常状態に達したと判断して温度を下げ、再び大きいコストと小さいコストのグループに PE を分けて、同様な処理を繰り返す。逆に、十分変換を施しても同様なコスト分布にならなければ、中低温まで温度が下がってきたと考える。中低温では、各 PE は λ 回前から現在までの変換で得られたコストの最小値を保持し、PE の中で現在最も小さいコストを持つ PE の λ 回前からの最大値より、最小値が大きければ、その PE は極小解に陥ってしまったとみなす。そのような PE は、他の PE のコストが小さい状態を受信し、それ以後は受信した状態についてアニーリングを行なう。

以上のような並列 SA 法は、高温部では二つのグループのコスト分布の違いがすぐになく

なるので、変換回数を削減することができる。また、中低温部ではコストが小さい状態に対して複数の PE が SA を行なうことが多くなり、より高い確率でコスト最小の状態を見つけることが期待できる。更に、状態の通信はコストの通信よりも通信負荷が大きいので、極小解に陥ってしまったと考えられる PE だけが状態を受信する方法は通信負荷を小さくすることができる。

以下では、高温部でコストの分布に違いがあるかどうかを判断するために用いた順位検定について述べ、その後、並列 SA 法の処理について詳しく述べる。

3.1 順位検定

順位検定 [竹内 75] とは、二つの母集団のサンプルから、二つの母集団の確率分布が等しいかどうかを判定する検定方法である。例えば、二つの母集団 G_x, G_y から得られたサンプルが

$$(X_1, \dots, X_7) = (12, 27, 50, 61, 79, 91, 110)$$

$$(Y_1, \dots, Y_7) = (10, 18, 25, 30, 39, 85, 120)$$

とする。これを大きさの順に並べると、

$$yxyyyxyxyxxxyxy$$

となる。このとき、図 2 のようなグラフを考える。原点 $(0, 0)$ から出発して、まず最初の値が x ならば右へ一歩進み、 y ならば上へ一歩進む。次に第 2 の値を見て、 x ならば右へ、 y ならば上へ進む。このようにして、点 $(7, 7)$ まで進む道を考えることができる。そして、図 2 の影の部分、すなわち 45° とこのグラフで囲まれる部分の面積を検定統計量にしたものが順位検定である。

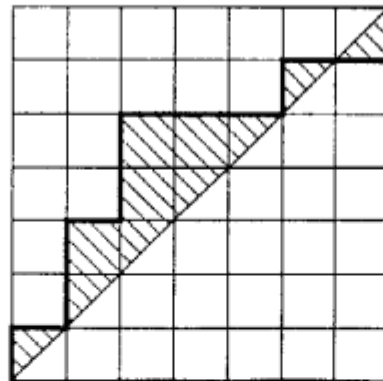


図 2: 順位検定

順位検定を用いた理由は、温度一定の SA では、定常状態に達した時に、初期状態に関係なく同じ定常確率分布に収束するためである。すなわち、コストの大小により PE をコストが小さいグループ G_x と大きいグループ G_y に分け、二つのグループのコストの分布に違いがなくなければ、定常状態に達したと考えるわけである。

3.2 処理詳細

本手法では、温度の管理、順位検定、状態送受信の決定などを行なう一つの管理 PE(以下では MPE と呼ぶ)、実際にアニーリングを行なう複数の状態生成 PE(以下では GPE と呼ぶ)が存在し、MPE に一つの PE が、GPE にその他の PE が割り当てられる。MPE の処理の流れを図 3 に示す。

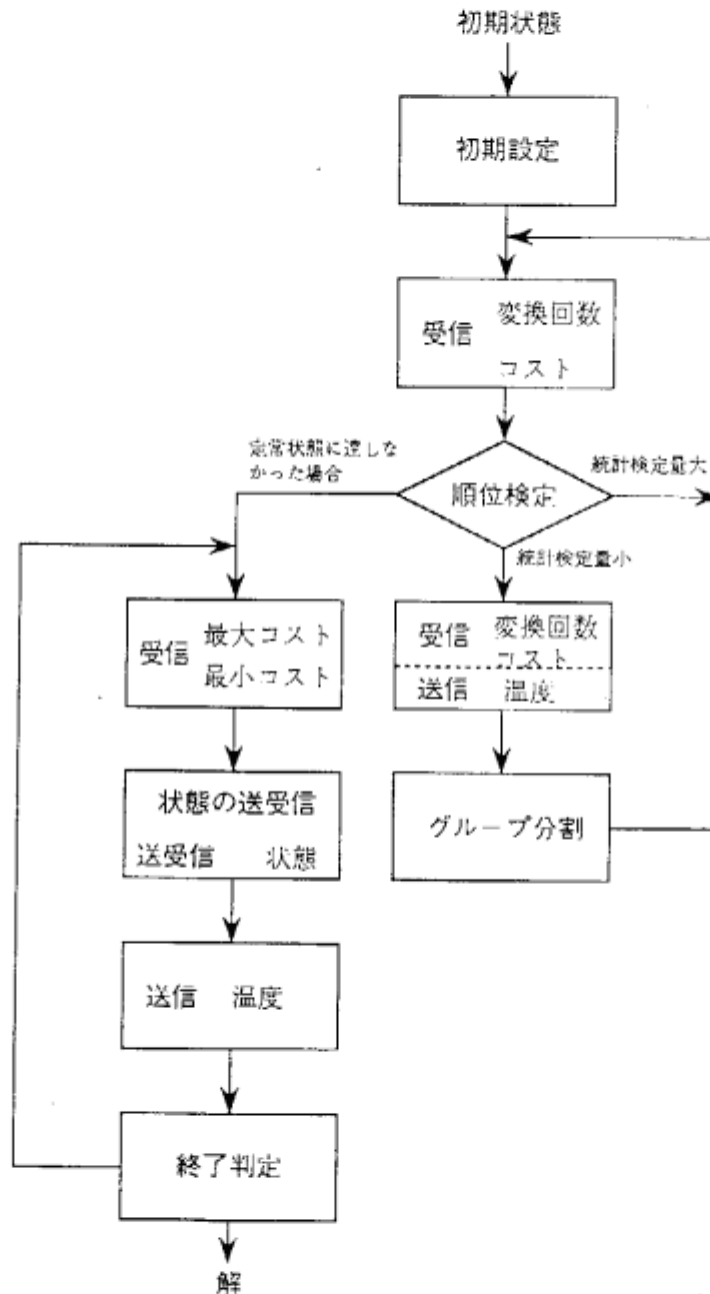


図 3: 管理 PE(MPE) の処理の流れ

初期設定では、MPE は一つの初期状態を各 GPE に割り振る。GPE は温度無限大で一定回数変換を繰り返し、異なる状態を生成する。そして、MPE にそのコストを送信すると同時に、初期温度を受信し、再び変換を開始する。このとき、MPE は送信されたコストに

より、コストが小さいグループ G_x とコストが大きいグループ G_y の二つに分け順位検定を行なう。このときの検定統計量は二つのグループのコスト分布が全く違うことを示す大きな値 r_0 となる。

次に、MPE は、一定の変換回数間隔で GPE からコストを受信し、 G_x のコストと G_y のコストで順位検定を行なう。このとき、検定統計量が $\beta \cdot r_0$ 以上ならば、まだ定常状態に達していないと考え、再びコストの受信を行なう（ただし、 β は $0 \leq \beta < 1$ の定数）。そうでなければ、定常状態に達したと考え、新しい温度を送信すると同時に、コストを受信する。その後、グループ分割部で、受信したコストにより再び二つのグループに分け、GPE からのコストの受信を再開する。

ただし、変換回数が K 以上になっても、定常状態に達することができなかった場合、コストが小さくなりそうもない GPE だけが現在持っている状態を捨てて、コストが小さい状態を受信する。すなわち、各 GPE は λ 回前から現在までのコストの最大値と最小値を保持しており、各温度の最終状態で最も小さいコストを持つ GPE の λ 回からの最大値よりも、最小値が大きい GPE だけが、他のコストの小さい状態を持つ PE から順に受信する。この送受信を行なう GPE の組は MPE が決定する。

終了判定は、前々回、前回、現在の温度で、送信されるコストの最小値が同じならば、各 GPE にアニーリングを終了するように要請し、最小のコストを持つ状態を解とする。

4 結果

上記のような並列 SA 法を PE 数が 16 個のマルチ PSI 上にインプリメントし、論理アーキテクチャ設計問題に適用した。ここで言う論理アーキテクチャ設計問題とは、PASCAL などの高級言語で書かれた動作仕様からレジスタ・トランスファー・レベルの回路を出力するものである [館野 90]。そのコスト c は、ALU、レジスタ、バスのチップ面積、処理時間を考慮した

$$c = (alu) + (register) + (bus) + (time) \quad (2)$$

で表される。

最終的に得られたコストを評価するために、最小コストに対する、最終コストと最小コストの差として、コスト誤差 e

$$e = \frac{c_{fin} - c_{opt}}{c_{opt}} \quad (3)$$

を定義した。ここで、 c_{fin} は最終コスト、 c_{opt} は最小コストである。一般に、 c_{opt} は分からないが、平成元年度からの実験で得られた解の最小値とした。

また、通常の SA との比較のため、次のようにパラメータを設定した。

初期温度 T_0	553°
温度減少規則	$T_{k+1} = 0.9 \cdot T_k$
終了条件	各温度での最終コストが 3 回連続同じとき

ただし、 T_0 は受理率 $\chi_0 = 0.9$ として、次式により求めたのものである [Laarhoven 87]。

$$T_0 = \frac{\overline{\Delta C}^{(+)}}{\ln(\chi_0^{-1})} \quad (4)$$

ここで、 $\overline{\Delta C}^{(+)}$ はランダムウォークの平均コスト増加値である。

上記の初期温度、温度減少規則、終了条件は、通常の SA の最も一般的なパラメータ値の一つである。これらの設定以外に並列 SA 法のパラメータとして、

定常状態判定の閾値	$0.4 \cdot r_0$
持続回数 λ	$5 \cdot K$

とした。ここで、 r_0 は各温度での開始時の順位検定値、 K は変換回数の上限である。

K を変化させて実験を行ない、各実験で乱数の種を変えて 5 回試行した。その平均のコスト誤差と計算時間を表 1 に示す。表の変換回数 K は、並列 SA では各温度での変換回数の上限を、通常の SA では各温度で K 回の変換を行なったことを意味する。

表 1: 並列 SA と SA の比較

変換回数 K	コスト誤差		計算時間 (sec)	
	並列 SA	SA	並列 SA	SA
32	0.218	0.405	474	471
64	0.141	0.302	776	920
128	0.080	0.237	1359	1936
256	0.099	0.163	2494	4159
512	0.046	0.137	5012	8154

表 1 から、通常の SA で平均エラーが 0.15 を下回るには、各温度での 512 回の変換回数が必要であるが、並列 SA では 64 回で十分であることが分かる。そして、SA で変換回数が 512 回の場合は 8154(sec) であり、並列 SA で変換回数が 64 回の場合は 776(sec) である。このことから、本並列 SA 法では PE 数が 16 個の場合の台数効果は約 10.5(= 8154/776) であると言える。

5 まとめ

本稿では、SA の新しい並列処理方法について述べた。本手法は、PE のコストの分布から定常状態を判断することと、コストの変動範囲から極小解に陥ってしまった判断された PE だけが状態の受信を行なうという二つの特徴を持つ。論理アーキテクチャ設計問題について本手法の有効性を確認したが、他の並列 SA 法との定量的な比較が不十分である。今後の課題としては、これらの比較に加えて、大規模並列計算機では、管理 PE の通信負荷がかなり大きくなることが予想されるので、定常状態の判定、状態の送受信を局所的な範囲内の PE 間で行なう処理方式にする予定である。

謝辞

本研究は、ICOT の再委託研究として行なったものである。

本研究の機会を与えて下さった ICOT 第 7 研究室の新田室長、情報通信東京研究所基礎研究部の山崎部長に深く感謝します。

参考文献

- [木村 90] 木村、瀧: 時間的に一様な並列アニーリングアルゴリズム, 信学技法, NC90-1, pp.1-8, (1990).
- [舘野 90] 舘野、荒木、間藤: 論理設計エキスパートシステム (1) - アニーリング・ルールベース -, 第 42 回情報処理学会大会, 6K-3, (1990).
- [竹内 75] 竹内: 確率分布と統計解析, 日本規格協会, (1975).
- [山下 89] 山下、秋山、安西: エントロピーを用いた改良シミュレーティッドアニーリングに関する研究, 信学技法, NC89-67, pp.37-42, (1989).
- [Aarts 86] E.H.L.Aarts, F.M.J.Bont, J.H.A.Habers and P.J.M. van Laarhoven, "Parallel implementations of the statistical cooling Algorithm", *Integration, journal* 4, pp.209-238, (1986).
- [Aarts 89] E.H.L.Aarts, J.H.M.Korst, "Simulated Annealing and Boltzmann Machines", John Wiley & Sons, (1989).
- [Casotto 87] A.Casotto and A.Sangiovanni-Vincentelli, "Placement of standard cells using simulated annealing", *Proc. IEEE Int. Conf. on Computer-Aided Design*, Santa Clara, pp.350-353, (1987).
- [Kirkpatrick 83] S.Kirkpatrick, C.D.Gelatt and M.P. Vecchi, "Optimization by simulated annealing", *Science*, vol.220, no.4598, pp.671-683, (1983).
- [Rose 86] J.S.Rose, D.R.Blythe, W.M.Snelgrove and Z.G.Vrancic, "Fast, high quality VLSI placement on an MIMD multiprocessor", *Proc. IEEE Int. Conf. on Computer-Aided Design*, Santa Clara, pp.42-45, (1986).
- [Laarhoven 87] P.J.M. van Laarhoven and E.H.L.Aarts, "Simulated Annealing: Theory and Applications", Kluwer Academic Publishers, (1987).