ICOT Technical Memorandum: TM-0816

TM-0816

LK-to-NK変換

越村三幸

October, 1989

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato ku Tokyo 108 Japan

(03) 456-3191~5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

LK-to-NK 変換

越村三幸
(財) 新世代コンピュータ技術開発機構研究所 †

概要

LK の証明図を NK の証明図に変換する変換規則の概略を述べる. 本変換により LK の cut なし証明図は, NK の証明図の正規型に変換されることが示される. 本変換規則は, 自動証明システムや証明検証システムにおける証明の説明機構に用いられることを目指している.

1 はじめに

自動証明システムにとって, その推論過程をユーザに提示する説明機構はシステムの使い勝手の観点から重要である. これらのシステムの多くは一階の述語論理で表現される数学的対象を扱っている. 自動証明システムは何らかの形式的体系に基づいて推論を行っている. 一階の述語論理の形式的体系は様々であるが, これまでの多くの自動証明システムは, システムの推論過程をそのまま (或いは多少化粧直しをして) ユーザに提示してきた. 同様のことは証明検証システムに対してもいうことができる.

ここで "そのまま" といった意味は, 推論過程で用いられた形式的体系とユーザへの説明言語が基づいている形式的体系が "同じ" ということである. ユーザがその形式的体系に馴染みが深ければこれでも良いが, そうでなければ説明はユーザにとって違和感のあるものになる. 例えば, 自動証明システムの形式的体系として有名な導出原理 [Robinson] による証明過程を提示されたとする. この場合一つ一つの推論を追っていくことは容易であるが, 証明全体の流れを追っていくことは容易ではない. 導出原理の証明法が, 数学でふだん用いている証明法とかなり違っているからである. 導出原理はプログラミングするのに容易な形式的体系ではあるが, これは人間にとっても分かり易いということではない.

推論機構に用いる形式的体系と説明機構に用いる形式的体系が同じである必要はない. 推論機構に用いる体系は機械向きに, 説明機構に用いる体系は人間が普段行っている証明にできるだけ近いものを選ぶべきである. 前者の体系としては導出原理や LK [Gentzen] の変形が良く知られ, 実際にこれらの体系に基づく自動証明システムが作成されている [佐藤, 西村, 永田, Edwald]. 後者の体系として, NK [Gentzen] がある. NK に基づいた証明記述言語を持つ証明検証システムも提案されている [Sakai].

推論機構と説明機構の形式的体系が違う場合, その間の変換規則を与えてやらなければならない. 本論文では LK に基づく推論機構と NK に基づく説明機構が既にあるものとして, LK の証明図から NK の証明図の変換規則を考える. LK と NK を考えたのは上で述べたように既にそのようなシステムが存在するからである. また, 導出原理による証明から LK の証明を得る方法は既に報告されている [Oshiba].

2 変換規則の概略

[Gentzen] はいわゆる『基本定理』を証明するために LK を導入し, LK の説明のために NK を導入している. そしてこれらが当時良く知られていた Hilbert の体系 (LHK と略記する) と等しいことを, これら 3 つの体系の証明図の変換規則を与えることによって証明している. 証明は先ず直感主義論理の体系化である NJ,LJ,LHJ の等価性について行い, 次にそれを拡張する形で NK,LK,LHK が等しいことを証明している. これら変換規則のうち LK-to-LHK 変換の方法は, 本論文で述べる変換法と考え方が似ているが詳細は [Koshimura] に譲る.

[Zucker] は LJ-to-NJ 変換について述べ, LJ における cut- 除去手続きと NJ における正規化手続きの間の対応の解析を行っている. また, 直感主義的自然数論においても同様の解析を行っている. そして, LJ の cut なし証明図が NJ の証明図の正規型に変換されることを示している. Zucker の証明法は次のようなものである.

先ず, LJ の証明図から NJ の証明図への many-one 写像を与える. 次に LJ の任意の証明図 $\mathcal{D}_1$ を与え, これに cut- 除去手続きを適用して得られる証明図の列 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$ を考える. この列は cut なし証明図に収束する. Zucker はこの LJ の証明図の写像先の NJ の証明図列 $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2, \ldots$ において, 各 i について $\mathcal{D}'_{i+1}$ は $\mathcal{D}'_i$ から正規化手続きによって得られることを示し, この証明図列

† 〒108 東京都港区三田 1-4-28 三田国際ビル 21 階
TEL: 03-456-3069 NET: koshimura@icot.jp

が正規型に収束することを示した.

本論文では, LK の証明図から NK の証明図への変換手続きについての基本的考え方を述べる. 詳細は, [Koshimura] を参照されたい.

2.1 LJ-to-NJ 変換 φ

LJ-to-NJ 変換 φ の基本的考え方は, 次の図式で示される. これは, [Zucker] と同じである.

$$\Gamma \overset{\mathcal{D}}{\to} C \overset{\varphi}{\Longrightarrow} \begin{array}{c}\Gamma\\ \varphi(\mathcal{D})\\ C\end{array}$$

ここで $\Gamma \overset{\mathcal{D}}{\to} C$ は, $\Gamma \to C$ に至る ($\Gamma \to C$ を含む) 証明図 $\mathcal{D}$ を表す.

変換規則は LJ の各推論規則ごとに与えられるが, 以下に幾つかの具体例を示す. 実際の変換規則は index formula [Zucker] という考え方を使い場合分けして定義されるが, それは本質的ではないのでここでは一般的な場合のみについて記す.

1. 公理 $\mathcal{D} = A \to A$

$$\varphi(\mathcal{D}) = A$$

2. cut $\mathcal{D} = \dfrac{\Gamma \overset{\mathcal{D}_1}{\to} A \quad A,\Delta \overset{\mathcal{D}_2}{\to} B}{\Gamma,\Delta \to B}$

$$\varphi(\mathcal{D}) = \begin{array}{cc}\Gamma & \\ \varphi(\mathcal{D}_1) & \\ A & \Delta \\ \varphi(\mathcal{D}_2) & \\ B & \end{array}$$

3. $\wedge$-L $\mathcal{D} = \dfrac{A,\Gamma \overset{\mathcal{D}_1}{\to} C}{A \wedge B, \Gamma \to C}$

$$\varphi(\mathcal{D}) = \begin{array}{c} \dfrac{A \wedge B}{A}\ \wedge\!-E \quad \Gamma \\ \varphi(\mathcal{D}_1) \\ C \end{array}$$

4. $\wedge$-R $\mathcal{D} = \dfrac{\Gamma \overset{\mathcal{D}_1}{\to} A \quad \Gamma \overset{\mathcal{D}_2}{\to} B}{\Gamma \to A \wedge B}$

$$\varphi(\mathcal{D}) = \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \varphi(\mathcal{D}_1)\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \varphi(\mathcal{D}_2)\\ B\end{array}}{A \wedge B}\ \wedge\!-I$$

2.2 LK-to-NK 変換

LJ は式の右辺に現れる論理式の数が高々 1 個であったので, NJ への変換が素直に定義できた. 一方 LK の場合は右辺に現れる論理式の数は任意個なので LJ-to-NJ のように素直に変換規則を定義することはできない. そこで元の LK の証明図を証明図中の式の右辺に現れる論理式の数が, 高々 1 個であるような証明図に書き換えることを考える. しかし一般にこの書き換えにより, 証明図中の全ての式の右辺の論理式の数を高々 1 個にすることはできない. そのような書き換えが可能ならば, 元の証明は LJ の範囲で可能となるからである. 書き換えられた証明図のどこかに, LJ の範囲では証明されない部分が出てくるはずである. その部分は NK に変換した場合, NJ と NK の差として反映されるはずである. ここで NJ と NK の違いを考える. NK は NJ の推論規則に二重否定の除去

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

の推論規則を加えたものである. 例えば, 次のような NK の証明

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \dfrac{\neg\neg A}{A}\ \text{二重否定の除去}\end{array}$$

を LK に変換すると次のようになるであろう.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \to \neg\neg A\end{array} \quad \neg\neg A \to A}{\Gamma \to A}\ cut$$

cut の右上式が LK の部分 (排中律の証明) で左上式が LJ の部分となる.

以上のような考察から, 元々の LK の証明図を次のような性質を持つ別の LK の証明図に変換することにする.

1. 証明図は 2 つの部分からなる. 一方は主部, もう一方は副部である.

2. 主部は LJ の証明図である. したがって, 主部は φ により NJ に変換される.

3. 副部は排中律に相当する式の LK の証明図である.

上では副部は $\neg\neg A \to A$ に至る証明図であったが, 以下では $\to A, \neg A$ に至る証明図を考える. 主部と副部は次のように cut で結合される.

$$\dfrac{\to A, \neg A \quad \neg A, \Gamma \overset{\mathcal{D}}{\to}}{\Gamma \to A}\ cut$$

この部分は，次のような NK の証明図に変換される．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \ \Gamma \\ \varphi(\mathcal{D}) \\ \bot\end{matrix}}{\neg\neg A}\ \neg - I}{A}\ \text{二重否定の除去}$$

以降，φ は前節の φ にこの変換を加えたものを指すことにする．

主部に現れる式の右辺に許される 1 個の論理式を決める必要がある．これを決定するのが関数 $\mathcal{F}$ である．$\mathcal{F}$ は LK の証明図から論理式への関数である．ここでは幾つかの場合を示すにとどめる．

$$\mathcal{F}(A \to A) = A$$

$$\mathcal{F}\left(\dfrac{\Gamma \overset{\mathcal{D}_1}{\to} \Delta, D \qquad D, \Pi \overset{\mathcal{D}_2}{\to} \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}\right) = \mathcal{F}(\mathcal{D}_2)$$

$$\mathcal{F}\left(\dfrac{C, \Gamma \overset{\mathcal{D}}{\to} \Delta}{C \wedge D, \Gamma \to \Delta}\right) = \mathcal{F}(\mathcal{D})$$

$$\mathcal{F}\left(\dfrac{\Gamma \overset{\mathcal{D}_1}{\to} \Delta, C \qquad \Gamma \overset{\mathcal{D}_2}{\to} \Delta, D}{\Gamma \to \Delta, C \wedge D}\right) = C \wedge D$$

一言でいうと，$\mathcal{F}(\mathcal{D})$ は証明図 $\mathcal{D}$ を終式から上へたどっていき，式の右辺に現れる最初の主論理式でかつ終式の右辺に現れるものである．そのような論理式がない場合は，式の右辺を空にしておく．

次に，LK の証明図を別の LK の証明図に変換する χ の定義を幾つかの推論規則について述べる．$\mathcal{F}(\mathcal{D})$ の種類によって場合分けしなければならない規則もあるが，そのような場合はいずれか 1 つを述べるにとどめる．

1. 公理　$\mathcal{D} = A \to A$

$$\chi(\mathcal{D}) = A \to A$$

2. cut　$\mathcal{D} = \dfrac{\Gamma \overset{\mathcal{D}_1}{\to} \Delta, D \qquad D, \Pi \overset{\mathcal{D}_2}{\to} \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$

   (a) $\mathcal{F}(\mathcal{D}_1) = D$

$$\chi(\mathcal{D}) = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Delta, \Gamma \overset{\chi(\mathcal{D}_1)}{\to} D \qquad \chi(\mathcal{D}'_2)}{\neg\Delta, \Gamma, \neg\Lambda', \Pi \to \mathcal{F}(\mathcal{D}_2)}\ cut}{\mathit{several\ interchanges}}}{\neg\Delta, \neg\Lambda', \Gamma, \Pi \to \mathcal{F}\ (\mathcal{D}_2)}$$

$$\chi(\mathcal{D}'_2) = \dfrac{\dfrac{\neg\Lambda', D, \Pi \overset{\chi(\mathcal{D}_2)}{\to} \mathcal{F}(\mathcal{D}_2)}{\mathit{several\ interchanges}}}{D, \neg\Lambda', \Pi \to \mathcal{F}\ (\mathcal{D}_2)}$$

3. $\wedge$-L　$\mathcal{D} = \dfrac{C, \Gamma \overset{\mathcal{D}_1}{\to} \Delta}{C \wedge D, \Gamma \to \Delta}$

$$\chi(\mathcal{D}) = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Delta', C, \Gamma \overset{\chi(\mathcal{D}_1)}{\to} \mathcal{F}(\mathcal{D}_1)}{\mathit{several\ interchanges}}}{C, \neg\Delta', \Gamma \to \mathcal{F}\ (\mathcal{D}_1)}}{C \wedge D, \neg\Delta', \Gamma \to \mathcal{F}\ (\mathcal{D}_1)}\ \wedge - L}{\dfrac{\mathit{several\ interchanges}}{\neg\Delta', C \wedge D, \Gamma \to \mathcal{F}(\mathcal{D}_1)}}$$

4. $\wedge$-R　$\mathcal{D} = \dfrac{\Gamma \overset{\mathcal{D}_1}{\to} \Delta, C \qquad \Gamma \overset{\mathcal{D}_2}{\to} \Delta, D}{\Gamma \to \Delta, C \wedge D}$

   (a) $\mathcal{F}(\mathcal{D}_1) = C$ and $\mathcal{F}(\mathcal{D}_2) = D$

$$\chi(\mathcal{D}) = \dfrac{\neg\Delta, \Gamma \overset{\chi(\mathcal{D}_1)}{\to} C \qquad \neg\Delta, \Gamma \overset{\chi(\mathcal{D}_2)}{\to} D}{\neg\Delta, \Gamma \to C \wedge D}\ \wedge - R$$

3　cut なし証明図と正規型

LK における cut なし証明図と NK の証明図の正規型の本質的な性質を一言でいえば，それは“回り道がない”ということである．そのような証明では，結論に含まれている概念以外の一切の概念は，その証明には現れない．

cut なし証明図の定義は明白であるが，NK の証明図の正規型の定義はそれに比べやや複雑である．二重否定の除去がなければ，次のような推論の列が現れない証明図であると定義すれば良い．

$$\begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots(1) & \vdots(2) \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \wedge - I}{A}\ \wedge - E \\ \vdots(3) \end{matrix}$$

上のように，導入の推論で入った論理記号 $\wedge$ がすぐ除去の推論で除かれてしまうような証明は，A が得られているのに推論を重ねた末に再び A を結論するので，回り道をした証明と考えることができる．この場合，

$$\begin{matrix} \vdots(1) \\ A \\ \vdots(3) \end{matrix}$$

と 2 つの推論を取り去ればより単純な証明を得ることができる[1].

このように正規型を定義すれば, 与えられた NK の証明図が正規型か否かは, 証明図中の引き続く 2 つの推論を観察するだけで良い. しかし二重否定の除去を考えると, これだけでは正規型の定義としては不十分であることが, 次の例から示される.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots(1)}{A} \quad \overset{\vdots(2)}{B}}{A \wedge B} \qquad \overset{1}{\neg(A \wedge B)}}{\perp}}{\neg\neg(A \wedge B)}\;1}{A \wedge B}\;\text{二重否定の除去}}{\underset{\vdots(3)}{A}}
$$

これもやはり, A を仮定し A を結論している. しかし前の例のように, 引き続く 2 つの推論だけをみていたのではそのことは分からない. そこで正規型の定義として,

(1) 導入の推論で入った論理記号が直下の推論で除去されることはない.

という規則に加えて

(2) 二重否定の除去で推論された論理式の論理記号はその直下の推論で除去されることはない.

を付け加えることにする.

正規型の定義を上のようにすると, 次の定理が成り立つことが分かる.

定理 1 $\mathcal{D}$ を LK の cut なし証明図とする. このとき, NK の証明図 $\varphi(\chi(\mathcal{D}))$ は正規型となる.

証明. 証明図 $\mathcal{D}$ に含まれる推論の数に関する帰納法による. 条件 (1) については, 変換規則が次の性質を持つことで示される.

- φ で写された LK の証明図中, 除去の規則はその部分証明図の上に置かれ, 導入の規則は下に置かれる.

したがって $\varphi(\chi(\mathcal{D}))$ の各道 (path) を上から辿ると, あるところまでは除去の規則が続き, あるところからは導入の規則が続くことになる. これにより導入の規則により導入された論理記号が, 直ぐ除去されることはないことが分かる. 条件 (2) についても, 二重否定の除去が出現する場合について調べることにより示すことができる. ♡

[1] [Prawitz] はこのような操作を加えることにより, 任意の NK の証明図は正規型に変更できることを示し, Gentzen の基本定理と同等のことを示した. ただ, そこで使われている NK は Gentzen のものと ¬ に関する推論規則が若干異なる.

4 おわりに

LK の証明図を NK の証明図に変換する変換規則について述べた. 本変換規則により cut なし証明図は NK の証明図の正規型に変換される. 本論文では, LK に基づく自動証明システムと NK に基づく証明記述言語があるものと仮定した. 本変換規則は, 自動証明システムと証明支援システムの融合の手助けになるであろう.

参考文献

[Edwald] Tryggvi Edwald. *tepv- an Automatic Theorem Prover*, 筑波大学数学研究科修士論文, 1987

[Gentzen] G. Gentzen. *Untersuchungen über das logische Schließen I,II*, Matematische Zeitschrift, Vol.39, pp.176–210,405–431, 1934

[Koshimura] Miyuki Koshimura. *LK-to-NK Transformation*, ICOT-TR 499, 1989

[Prawitz] Dag Prawitz. *Natural Deduction A Proof-Theoretic Study*, Almquist and Wiksell, Stockholm, 1965

[Oshiba] Takeshi Oshiba. *A Method for Obtaining Proof Figures of Valid Formulas in the First Order Predicate Calculs*, Comment. Math. Univ. St. Pauli, Vol.30, No. 1, 1981

[Robinson] J. A. Robinson. *A machine-oriented logic based on the resolution principle*, J.ACM 12, pp.23-41, 1965

[Sakai] Kô Sakai. *Toward Mechanization of Mathematics* Proc. of the First France-Japanese Symposium on Programming of Future Generation Computing, pp.335-390, 1986

[Zucker] J. Zucker. *The correspondence between cut-elimination and normalization*, Ann. Math. Logič,7, pp.1-156, 1974

[佐藤] 佐藤泰介. 導出原理による定理証明, 情報処理, Vol.22 No.11, 1981

[永田] 永田守男. 定理の自動証明法, 情報処理, Vol.24 No.4, 1983

[西村] 西村敏男. 定理の証明, 情報処理, Vol.24 No.3, 1983