TM-0806

Metisによる拡張単一化の完全性

大須賀昭彦(東芝), 坂井　公

September, 1989

©1989, ICOT

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03) 456-3191～5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

Metisによる拡張単一化の完全性

大須賀昭彦　　　坂井公

(株) 東芝
システム・ソフトウェア技術研究所
ohsuga@ssel.toshiba.junet

(財) 新世代コンピュータ技術開発機構
sakai@icot.junet

等式理論を法として単一化を行なう拡張単一化のことを E 単一化という．本稿では，E 単一化を行なう半決定手続きを与える．この手続きは，任意の等式理論に対して完全である．さらには，等式理論に対応する完備な項書換え系が理論的に存在すれば，E 単一化の過程でそれを獲得することができる．完全性の証明には証明変換の手法を用いる．この E 単一化手続きは，ICOT で開発中の項書換え系生成システム *Metis* に実装されており，数々の実験によりその実用性は確認済である．

A Complete E-unification by *Metis*

Akihiko Ohsuga　　　Kô Sakai

TOSHIBA Corp.
Systems & Software Engineering Lab.

Institute for
New Generation Computer Technology

70, Yanagi-cho, Saiwai-ku, Kawasaki, Kanagawa, 210 Japan

Unification modulo an equational theory E is called E-unification. This paper presents a semi-decision procedure that generates a complete set of E-unifiers for a given pair of terms. The procedure is complete for any equational theory E. Moreover, if there is a complete term rewriting system for the theory, the procedure obtains one during the E-unification process. Completeness proof is based on proof transformation technique. This E-unification procedure has been incorporated in *Metis*, the term rewriting system generator developed in ICOT, and practicality of the procedure is confirmed through many experiments.

1 はじめに

単一化 (unification) とは，2つの項を構文的に一致させる代入を求めることである．論理型言語などのプログラミング言語や，定理の自動証明，証明チェッカなどのシステムの実現，もしくは自然言語処理などの人工知能の研究において単一化の果たす役割は本質的であるが，これらの研究が進むにつれ，単一化に求められる機能も高度かつ多様になってきている．拡張単一化 (extended unification) は，こういった要求に応えるため，項の構文的一致だけでなく何らかの解釈のもとで2項を等しくするよう単一化を拡張したものである．本稿においては，拡張単一化の一つとして，等式理論 E を法に単一化を行なう E 単一化を考える．これは，理論的に単一化の自然な拡張になっているだけでなく，論理型と関数型言語の融合，論理型言語への制約の導入，等号付き一階述語論理の証明システムの実現などへ応用可能な実用的拡張といえる．

E 単一化は最初に Plotkin によって研究され[14]，その後特定の等式理論を対象とした E 単一化が多く研究された．一般的な手法としては，ナローイング (narrowing) や向付きパラモジュレーション (oriented paramodulation) などを用いた E 単一化があるが，これらは等式理論に対応する完備な (すなわち，合流的かつ停止的) 項書換え系 (term rewriting system)[6, 4]の存在を前提としている．Gallier と Snyder が完備な項書換え系の存在を前提とせず，任意の等式理論のもとで E 単一化を行なう完全な手続きを提案している[5]が，効率的とはいいがたく完全性の証明も不透明である．

E 単一化により求まる代入を E 単一化子と呼ぶ．単一化の場合と異なり，E 単一化においては最汎な E 単一化子が存在するとは限らない．そこで，次のような集合について考える．τ, v を項，E を等号系，つまり等式の集合とする．E を法とする τ と v の E 単一化子の完全集合とは，τ と v の E 単一化子の集合で，任意の τ と v の E 単一化子について E を法としてより汎用な代入を含むものをいう．つまり，任意の E 単一化子を代表するような集合である．完全集合から冗長な代入を取り除いたものを極小完全集合という．極小完全集合は，E に依存して，1要素からなる (つまり，最汎単一化子が存在する) か，有限個の要素からなるか，無限要素からなるか，または極小完全集合そのものが存在しない (つまり，ある E 単一化子については，より汎用な E 単一化子が存在しない) のいずれかとなる[20, 8]．また，E 単一化可能性の判定は決定不能である．これらのことから，完全集合をすべて求める手続きも，任意の2項について E 単一化可能か否かを判定する手続きも，実現可能とは限らないことがわかる．そこで，E 単一化手続きの完全性は次のように定義される．E を等号系，τ, v を E 単一化可能な2項とする．τ と v の任意の E 単一化子 θ について，E を法として θ より汎用な E 単一化子を有限ステップで獲得するとき，E 単一化手続きは完全 (complete) である．

提案する手続きは，完備化手続きとナローイングの融合に基づくものである．E を等号系，R を項書換え系，τ, v を E 単一化すべき2つの項とすると，手続きは E に対応する完備な R を構成しながら，それと並行して τ と v にナローイングを施す．このとき R の停止性を弱め，基礎項上の停止性のみ保証することで手続きが失敗に終る場合を防ぐ．すると，失敗しない完備化は，たとえ止まらなくても等式の半決定手続きとして完全であるので，τ と v が E 単一化可能ならば必ずその E 単一化子を求めることができる．これは，等号付き一階述語論理などにおける反駁型定理証明で用いられる技術を取り入れたものである．また，手続きは完備化を含むものとなっているので，完備な R が存在すれば E 単一化の過程でそれを獲得する．いったん完備な R が獲得されると以降は従来のナローイングによる E 単一化と同等になるので，手続きはナローイングの一般化として捉えることもできる．手続きの完全性については証明変換 (proof transformation)[1]手法を用いて示す．これは，手続きを推論規則によって表現し，E 単一化をその規則の適用と捉える手法である．これによる完全性の証明は手続きの実行順序などの詳細に依存しないため，推論規則と対応がつく範囲で手続きを変更しても完全性に影響のないことが保証される．また，範囲を越えて手続きを変更した場合でも，対応する推論規則を修正することで完全性について容易に検証できるなどの利点を持つ．

本稿では，第2節において基本的な記法や用語を導入した後，第3節で E 単一化と等式証明の関連について，ナローイングによる E 単一化を例に説明する．提案する E 単一化アルゴリズムを第4節において与え，第5節でその完全性を証明する．最後に第6節において実験例を示す．ただし，紙面の都合上ほとんどの証明は省略する．証明の詳細については，[13] を参照されたい．

2 準備

本節においては，基本的な用語と記法を導入する．ただし，述語論理の標準的な記法や用語については既知であることを仮定する．

まず，ここで用いる言語を定める．$\mathcal{F}$ を関数記号 (function symbol) の有限集合，$\mathcal{V}$ を変数 (variable) の可算無限集合とする．$\mathcal{F}$ の要素は f,g,h などの英小文字もしくは $+,-$ などの特殊記号で記述し，$\mathcal{V}$ の要素は X,Y,Z などの英大文字で記述する．$\mathcal{F}$ の各関数記号には階数 (arity, rank) と呼ばれる自然数が与えられており，f_a によって f の階数を表すことにする．$\mathcal{F},\mathcal{V}$ 上の項 (term) は以下の規則によって構成される．

(1) $\mathcal{V}$ の変数は項である．

(2) $\mathcal{F}$ の関数記号で階数0のものは項である．このような項を特に定数 (constant) という．

(3) f を $\mathcal{F}$ の関数記号で階数 f_a が0以外のもの，$\tau_1 \ldots \tau_{f_a}$ を項とすると，$f(\tau_1,\ldots,\tau_{f_a})$ は項である．

$\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ をこのように構成される $\mathcal{F},\mathcal{V}$ 上のすべての項の集合とする．$\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ の元，つまり項を σ,τ,υ などのギリシャ小文字で記述し，$\mathcal{V}(\tau)$ を τ に出現するすべての変数の集合とする．$\mathcal{V}(\tau)=\phi$ なる τ，すなわち変数を含まない項を基礎項 (ground term) と呼び，$\mathcal{T}(\mathcal{F})$ によって $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ におけるすべての基礎項の集合を表す．本稿においては，$\mathcal{T}(\mathcal{F}) \neq \phi$ である．つまり $\mathcal{F}$ に少なくとも1つの定数が存在することを仮定する．

例 2.1 関数記号 a,b,f,g について $a_a=0,b_a=0,f_a=2,g_a=1$ とすると，$X,a,g(b),f(g(Y),b)$ などはいずれも項である．また，$+,-,0$ について $+_a=2,-_a=1,0_a=0$ とすると，$X+Y,-0$ なども項である[1]．この中で，$a,g(b),-0$ が基礎項である．

次に項の構造に関する記法と操作を定義する．項の中に再帰的に現れる項を部分項 (subterm) と呼ぶ．項における部分項の位置を一意に定めるため，出現位置という概念を導入する．τ における部分項の出現位置 (occurrence) とは，以下のように定まる自然数の有限列である．

(1) τ 自身の出現位置は ε で表される空列である．

(2) τ の部分項 $f(\tau_1,\ldots,\tau_{f_a})$ の出現位置が o のとき，τ_i $(1\leq i\leq f_a)$ の出現位置は $o\cdot i$ である．

項 τ の部分項で，その出現位置が o であるものを τ/o によって表す．$\tau \neq \tau/o$ であるような部分項を特に真部分項 (proper subterm) と呼ぶ．また，τ の部分項 τ/o を υ で置換 (replacement) して得られる項を $\tau[o \Leftarrow \upsilon]$ で表す．この操作は，以下のように定義できる．

(1) $\tau[\varepsilon \Leftarrow \upsilon]$ は υ である．

(2) f を関数記号，$\tau_1\ldots\tau_{f_a}$ を項とすると，
$f(\ldots,\tau_i,\ldots)[i\cdot o \Leftarrow \upsilon]$ $(1\leq i\leq f_a)$ ならば
$f(\ldots,\tau_i[o\Leftarrow\upsilon],\ldots)$ である．

特に混乱がない場合に限り，項 τ が部分項として σ を持つことを $\tau[\sigma]$ と書き，その部分項を υ へ置換した結果を $\tau[\upsilon]$ によって表す．

例 2.2 項 $f(g(Y),b)$ に対しては $f(g(Y),b),g(Y),Y,b$ が部分項であり，それらの出現位置は各々 $\varepsilon,1,1\cdot 1,2$ である．この中で $f(g(Y),b)$ 以外は真部分項である．部分項の1つ $f(g(Y),b)/1 = g(Y)/\varepsilon$，つまり $g(Y)$ を a に置換して得られる項は $f(g(Y),b)[1 \Leftarrow a] = f(g(Y)[\varepsilon \Leftarrow a],b)$，つまり $f(a,b)$ である．

$\mathcal{V}$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への関数を代入 (substitution) という．通常，我々が用いる代入は，$\mathcal{V}$ における有限個の変数のみ値を変化させ，他の無限の変数については値を保存するものが多い．そこで，このような代入 θ を，$\theta=\{\tau_1/X_1,\ldots,\tau_n/X_n\}$ なる記法で表すことにする．これは，以下のように解釈する．

$$\theta(X)=\begin{cases}\tau_i & X=X_i\ (1\leq i\leq n)\text{のとき}\\ X & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

θ によって値の変化する変数の集合を代入 θ の定義域といい，定義域が空のもの，つまり恒等代入は ϕ で表すことにする．また，代入 θ と変数の有限集合 V について θ の定義域を V に限ったもの，つまり $\{\tau/X \mid \tau/X \in \theta$ かつ $X \in V\}$ で表現される代入を $\theta|_V$ によって表す．代入 θ は，以下のようにして $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への関数 $\overline{\theta}$ へ拡張することができる．

$$\begin{cases}\overline{\theta}(X)=\theta(X) & X\text{が変数のとき}\\ \overline{\theta}(c)=c & c\text{が定数のとき}\\ \overline{\theta}(f(\tau_1,\ldots,\tau_{f_a}))=f(\overline{\theta}(\tau_1),\ldots,\overline{\theta}(\tau_{f_a})) & \\ & f\text{が関数記号，}\tau_1\ldots\tau_{f_a}\text{が項のとき}\end{cases}$$

以降，$\overline{\theta}(\tau)$ を単に $\tau\theta$ で表す．$\equiv$ によって2つの項の構文的な一致を表すと，2項 τ,υ について $\tau\equiv\upsilon\theta$ なる代入 θ が存在するとき，τ を υ の具体例 (instance) という．

例 2.3 τ を $f(X,Y)$，θ を $\{g(Z)/X,b/Y\}$ とすると，$\tau\theta$ は $f(g(Z),b)$ となる．V を $\{X\}$ とすると，$\theta|_V=\{g(Z)/X\}$ となる．いうまでもなく，$\tau\theta$ は τ の具体例である．

任意の代入 θ_1,θ_2 に対して $\theta_1\cdot\theta_1' = \theta_2$ なる代入 θ_1' が存在するとき $\theta_1 \preceq \theta_2$ と定義する．ここで $\theta_1\cdot\theta_1'$ は，代入の

[1]ここでは $+(X,Y),-(0)$ などの本来の記法の代わりに，$X+Y,-0$ などの中置記法 (infix notation) や前置記法 (prefix notation) を一般の慣習に従って断りなく用いる．

合成を表す．つまり，$\tau(\theta\cdot\theta')$ は $(\tau\theta)\theta'$ のことである．2つの項 τ, υ について $\tau\theta \equiv \upsilon\theta$ となるとき，θ を τ と υ の単一化子 (unifier) と呼び，τ と υ は単一化可能 (unifiable) という．θ_0 が τ と υ の単一化子で，他の任意の単一化子 θ_i に対し $\theta_0 \preceq \theta_i$ となるとき，θ_0 を τ と υ の最汎単一化子 (most general unifier) という．任意の2項 τ, υ が与えられたとき，τ と υ が単一化可能か否かを決定し，単一化可能なら最汎単一化子と求めるアルゴリズムが存在する[10].

例 2.4 τ を $f(X, g(X))$，υ を $f(h(Y), Z)$ とすると，$\theta_0 = \{h(Y)/X, g(h(Y))/Z\}$，$\theta_1 = \{h(c)/X, c/Y, g(h(c))/Z\}$ などは τ と υ の単一化子である．このとき $\theta_0 \preceq \theta_1$ である．また，他の任意の単一化子 θ_i を考えても $\theta_0 \preceq \theta_i$ となるので，θ_0 は2項の最汎単一化子である．

項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ が定まっているとき，2項の対の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の2項関係という．$\Re$ をこのような2項関係とすると，対 (τ, υ) が $\Re$ に含まれることを $\tau\Re\upsilon$ と記述する．任意の項 τ, υ, ξ について $\tau\Re\upsilon$ ならば $\xi[\tau]\Re\xi[\upsilon]$ が常に成立するとき，$\Re$ は項の構造に関して単調であるという．また，任意の項 τ, υ と代入 θ について $\tau\Re\upsilon$ ならば $\tau\theta\Re\upsilon\theta$ が常に成立するとき，$\Re$ は代入に関して単調であるという．$\Re$ がこの2つの性質を同時に持つとき (項上) 安定な (stable) 関係という．以降において，$\overset{+}{\Re}$ と書くときは $\Re$ の推移閉包 (transitive closure) を，$\overset{*}{\Re}$ は $\Re$ の反射推移閉包 (reflexive and transitive closure) を表す．

等式 (equation) は $\lambda = \rho$ によって表される2項の対である．等式の有限集合 E が与えられたとき，2項関係 E を等号系 (equational system) と呼ぶ．$\leftrightarrow_E$ を E の対称かつ安定な閉包とする．すなわち，$\tau \leftrightarrow_E \upsilon$ であるのは，ある項 ξ，E の等式 $\lambda \doteq \rho$，代入 θ があって，$\tau \equiv \xi[\lambda\theta]$ かつ $\upsilon \equiv \xi[\rho\theta]$ となるとき，かつこのときに限られる．ここで，$\lambda \doteq \rho$ は $\lambda = \rho$ または $\rho = \lambda$ を表す略記である．このとき，$\leftrightarrow_E$ の反射推移閉包 $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ を等号系 E による同値関係 (equivalence relation) という．

E 単一化は，2つの項を E によって同値にする代入を求める操作にほかならない．つまり，2項 τ, υ が E のもとで E 単一化可能 (E-unifiable) となるのは，$\tau\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_E \upsilon\theta$ なる代入 θ が存在することをいう．このような θ を，E を法とする τ と υ の E 単一化子 (E-unifier) という．$\mathcal{U}(\tau, \upsilon)$ によって τ と υ のすべての E 単一化子の集合を表すと，代入の集合 $\Theta(\tau, \upsilon)$ は次のとき，かつこのときに限り τ と υ の E 単一化子の完全集合 (complete set of E-unifiers) である．

(1) $\Theta(\tau, \upsilon) \subset \mathcal{U}(\tau, \upsilon)$．

(2) 任意の $\theta \in \mathcal{U}(\tau, \upsilon)$ について $\theta' \preceq_E \theta$ なる $\theta' \in \Theta(\tau, \upsilon)$ が存在する．

(3) 任意の $\theta \in \Theta(\tau, \upsilon)$ について θ の定義域は $\mathcal{V}(\tau) \cup \mathcal{V}(\upsilon)$ に含まれる．

ここで $\preceq_E$ は，E を法とした代入上の順序である．つまり，等号系 E と2つの代入 θ_1, θ_2 について $\theta_1 \preceq_E \theta_2$ となるのは，$\theta_1 \cdot \theta_1' \overset{*}{\leftrightarrow}_E \theta_2$ なる代入 θ_1' が存在するとき，かつこのときに限られる．

例 2.5 $E = \{f(X, X) = g(X), h(a) = a\}$ とし，$f(h(X), a)$ と $g(h(a))$ を E 単一化すべき2項とする．このとき，E を法とする E 単一化子の完全集合 $\Theta(f(h(X), a), g(h(a)))$ は $\{a/X\}$ である．

書換え規則 (rewrite rule) は $\lambda \Rightarrow \rho$ によって表される2項の対である．書換え規則の有限集合 R が与えられたとき，2項関係 R を項書換え系 (term rewriting system) と呼ぶ．$\rightarrow_R$ を R の安定な閉包とする．すなわち，$\tau \rightarrow_R \upsilon$ であるのは，ある項 ξ，R の書換え規則 $\lambda \Rightarrow \rho$，代入 θ があって，$\tau \equiv \xi[\lambda\theta]$ かつ $\upsilon \equiv \xi[\rho\theta]$ となるとき，かつこのときに限られる．このとき，項 τ は R の書換え規則 $\lambda \Rightarrow \rho$ と代入 θ によって υ へ簡約 (reduction) されたといい，必要に応じて，用いた代入や書換え規則を $\tau \rightarrow_{R[\theta]} \upsilon$，$\tau \rightarrow_{R[\lambda\Rightarrow\rho]} \upsilon$ のように付加して記述する．τ は $\tau \rightarrow_R \upsilon$ なる υ が存在しないとき既約 (irreducible) である．$\tau \overset{*}{\rightarrow}_R \upsilon$ かつ既約な項 υ を項 τ の R に関する既約項 (irreducible term) といい，$\tau\downarrow_R$ で表す．$\rightarrow_R$ の対称閉包を $\leftrightarrow_R$ で表すと，$\leftrightarrow_R$ の反射推移閉包 $\overset{*}{\leftrightarrow}_R$ のことを項書換え系 R による同値関係という．また，$\leftrightarrow_E$ または $\leftrightarrow_R$ を $\leftrightarrow_{E\cup R}$ で表すと，$\leftrightarrow_{E\cup R}$ の反射推移閉包 $\overset{*}{\leftrightarrow}_{E\cup R}$ を E と R による同値関係という．

項書換え系 R は，任意の項 υ_1, υ_2 について $\upsilon_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_R \upsilon_2$ ならば $\upsilon_1 \overset{*}{\rightarrow}_R \omega$ かつ $\upsilon_2 \overset{*}{\rightarrow}_R \omega$ なる項 ω が必ず存在するとき，合流的 (confluent) であるという．また，R において $\tau_1 \rightarrow_R \tau_2 \rightarrow_R \cdots$ のような無限の簡約列が存在しないとき，R は停止的 (terminating) であるという．合流的かつ停止的な R を完備 (complete) な項書換え系といい，完備な R における τ の既約項 $\tau\downarrow_R$ は一意なので，特別に τ の R に関する正規項 (normal term) と呼ぶ．

本稿においては，等式や書換え規則に出現する変数はすべて全称束縛されているので，変数名には意味がない．よって，τ, υ について $\tau \neq \upsilon$ ならば $\mathcal{V}(\tau) \cap \mathcal{V}(\upsilon) = \phi$ と考えてよい．また，代入によって導入される変数と $\mathcal{V}(\tau) \cup \mathcal{V}(\upsilon)$ が衝突することがないとしても一般性を失わない．

3　E 単一化と等式証明

本節では E 単一化と等式証明の関係について述べ，ナローイングを用いた E 単一化が完全となる条件について考察する．まず，E 単一化の実行が等式の証明に対応することを示す．E を等号系，γ, δ を E のもとで E 単一化可能な2項，θ をその E 単一化子，つまり $\gamma\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_E \delta\theta$ が成立するものとする．このとき，以下のような有限列が存在する．

$$\sigma_0 \leftrightarrow_E \sigma_1 \leftrightarrow_E \cdots \leftrightarrow_E \sigma_l \qquad (1)$$

ここで，$\sigma_0 \equiv \gamma\theta$ かつ $\sigma_l \equiv \delta\theta$ である．この列は，$\mathcal{F}$ に属さない特別な関数記号 $\simeq$ を導入して，同じ σ_0, σ_l について，以下のように記述することもできる．

$$\sigma_0 \simeq \sigma_l \leftrightarrow_E \sigma_1 \simeq \sigma_l \leftrightarrow_E \cdots \leftrightarrow_E \sigma_l \simeq \sigma_l \qquad (1')$$

このような列を，E のもとでの $\gamma\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_E \delta\theta$ に対する証明 (proof) と呼ぶ．等号系 E と項書換え系 R について，両者による同値関係が等しい (つまり，$\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ と $\overset{*}{\leftrightarrow}_R$ が一致する) とき，R は E に対応するという．R は E に対応し，かつ合流的な項書換え系とする．すると，$\gamma\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_R \delta\theta$ が成立することより，$\gamma\theta \overset{*}{\rightarrow}_R \mu$ かつ $\delta\theta \overset{*}{\rightarrow}_R \mu$ であるような項 μ が存在する．そこで，先の $\gamma\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_E \delta\theta$ に対する証明を以下のように R のもとで与えることが可能となる．

$$\tau_0 \simeq \tau'_0 \rightarrow_R \tau_1 \simeq \tau'_1 \rightarrow_R \cdots \rightarrow_R \tau_m \simeq \tau_m \qquad (2)$$

ここで，$\tau_0 \equiv \gamma\theta, \tau'_0 \equiv \delta\theta$ かつ $\tau_m \equiv \mu$ である．このように $\tau_0 \simeq \tau'_0 \overset{*}{\rightarrow}_R \tau_m \simeq \tau_m$ なる形をした証明を，正規 (normal) と呼ぶ．正規証明は，同じ $R, \gamma, \delta, \theta$ についても一意とは限らないことに注意されたい．

例 3.1 例 2.5おける2項 $f(h(X), a), g(h(a))$ と唯一の E 単一化子 $\{a/X\}$ について，E のもとでの $g(h(a), a) \overset{*}{\leftrightarrow}_E g(h(a))$ に対する証明 (の1つ) は，

$$f(h(a), a) \simeq g(h(a)) \leftrightarrow_E f(h(a), h(a)) \simeq g(h(a)) \leftrightarrow_E$$
$$f(h(a), h(a)) \simeq f(h(a), h(a))$$

なる列である．また，$R = \{f(X, X) \Rightarrow g(X), h(a) \Rightarrow a\}$ とすると，R は E に対応し，かつ合流的である．このとき R のもとでの $g(h(a), a) \overset{*}{\leftrightarrow}_E g(h(a))$ に対する証明として，

$$f(h(a), a) \simeq g(h(a)) \rightarrow_R f(a, a) \simeq g(h(a)) \rightarrow_R$$
$$g(a) \simeq g(h(a)) \rightarrow_R g(a) \simeq g(a)$$

が得られる．

次にナローイングを定義する．項書換え系 R，2項 τ, υ に対し，$\tau \rightsquigarrow_R \upsilon$ となるのは次のとき，かつこのときに限られる．R の書換え規則 $\lambda \Rightarrow \rho$，τ の出現位置 o，代入 θ が存在し，$\tau\theta/o \equiv \lambda\theta$ かつ $\upsilon \equiv \tau\theta[o \Leftarrow \rho\theta]$ である．ここで，τ/o は変数でないものとする．このとき，項 τ が出現位置 o において R の書換え規則 $\lambda \Rightarrow \rho$ と代入 θ によって υ へナローイング されたといい，必要に応じて用いた代入や書換え規則を $\tau \rightsquigarrow_{R[\theta]} \upsilon$，$\tau \rightsquigarrow_{R[\lambda \Rightarrow \rho]} \upsilon$ のように付加して記述する．

ナローイングによる E 単一化とは，以下の列を得ることをいう．R, γ, δ を先のものとすると，

$$\upsilon_0 \simeq \upsilon'_0 \rightsquigarrow_{R[\theta_0]} \upsilon_1 \simeq \upsilon'_1 \rightsquigarrow_{R[\theta_1]} \cdots \rightsquigarrow_{R[\theta_{n-1}]} \upsilon_n \simeq \upsilon'_n \qquad (3)$$

ここで，$\upsilon_0 \equiv \gamma$ かつ $\upsilon'_0 \equiv \delta$ で，υ_n と υ'_n は代入 θ_n によって単一化可能であるとする．このような列を R のもとでの $\gamma \simeq \delta$ に対するナローイング列といい，代入 $\theta = (\theta_0 \cdot \theta_1 \cdots \theta_n)|_{\mathcal{V}(\gamma \simeq \delta)}$ を R のもとでナローイングによって求まる γ と δ の E 単一化子という．

例 3.2 例 3.1における R のもとでの $f(h(X), a) \simeq g(h(a))$ に対するナローイング列は，

$$f(h(X), a) \simeq g(h(a)) \rightsquigarrow_{R[\{a/X\}]} f(a, a) \simeq g(h(a)) \rightsquigarrow_{R[\phi]}$$
$$g(a) \simeq g(h(a)) \rightsquigarrow_{R[\phi]} g(a) \simeq g(a)$$

であり，これによって求まる $f(h(X), a)$ と $g(h(a))$ の E 単一化子は $(\{a/X\} \cdot \phi \cdot \phi \cdot \phi)|_{\{X\}} = \{a/X\}$ である．

Hullot は，R が完備であるときナローイングによる E 単一化が完全であることを示した[7]．証明の要点は，次の定理によって簡約列とナローイング列を対応づけることにある．

定理 3.3 (Hullot[7]) R を完備な項書換え系，μ を項，θ を正規な代入 (つまり，任意の $\nu/X \in \theta$ について，ν が R に関する正規項であるような代入) とする．このとき $\mu\theta$ からの任意の簡約列

$$\mu\theta \equiv \tau_0 \rightarrow_R \tau_1 \rightarrow_R \cdots \rightarrow_R \tau_n$$

に対して，ナローイング列

$$\mu \equiv \upsilon_0 \rightsquigarrow_{R[\theta'_0]} \upsilon_1 \rightsquigarrow_{R[\theta'_1]} \cdots \rightsquigarrow_{R[\theta'_{n-1}]} \upsilon_n$$

と各 i $(0 \leq i \leq n)$ について正規な代入 θ_i が存在して，$\tau_i \equiv \upsilon_i\theta_i$ となる．ここで，$\theta_0 = \theta|_{\mathcal{V}(\mu)}$ かつ $\theta_{i+1} = \theta_i \cdot \theta'_i|_{\mathcal{V}(\mu)}$ である．

この定理は，(2) の正規証明と (3) のナローイング列を対応づけるのに利用できる．E における (1') の形をした任意の証明を，(2) のような正規証明 (を与える R) に変換でき

るならば，定理3.3で存在が保証されているナローイング列(3)から正規な代入，すなわち正規なE単一化子を得られる．従って，ナローイングによるE単一化は完全である．ここでθが正規であることは本質的でない．なぜならば，θを正規でないγ,δのE単一化子としても，ある正規なE単一化子θ'があって$\gamma\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_E \gamma\theta'$かつ$\delta\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_E \delta\theta'$となることは明らかだからである．

4 無向E単一化手続き$\mathcal{A}_U$

本節においては，E単一化手続きをアルゴリズムとして与える．この手続きは，Rに関する停止性を弱め，基礎項上の停止性のみ保証することで，手続きが失敗する場合を完全に防ぐものとなっている．この拡張のために，Rの書換え規則は向きを待たない無向書換え規則として扱われる．以降では，無向書換え規則を$\lambda \Leftrightarrow \rho$によって記述し，無向書換え規則を用いるこの$E$単一化を無向$E$単一化手続きと呼ぶ．無向書換え規則を用いた手続きの完全性をいうために，次の完全簡約順序の概念が重要となる．

$\succ$を項上の順序とする．$\tau_1 \succ \tau_2 \succ \cdots$なる無限列が存在しないとき$\succ$は整礎 (well-founded) であるといい，安定かつ整礎な順序を簡約順序 (reduction ordering) と呼ぶ．これが基礎項の上で全順序となる，つまり任意の基礎項λ,ρ $(\lambda \neq \rho)$について$\lambda \succ \rho$または$\rho \succ \lambda$のいずれかが必ず成立するとき，$\succ$を完全簡約順序と呼ぶ．

簡約順序を与える順序付方法として，辞書式部分項順序 (lexicographic subterm ordering)[17, 16]，勝ち抜き順序[18]，再帰経路順序 (recursive path ordering)，部分項経路順序 (path of subterms ordering)，分解順序 (decomposition ordering) など多くのものが知られている[9]．以降において，$\succ$は適当に設定された完全簡約順序であるとする．

無向書換え規則による簡約やナローイングは，完全簡約順序を用いて以下のように定義される．

定義 4.1 Rを項書換え系，τ,υを項，$\succ$を完全簡約順序とする．τがυへ拡張簡約されるのは，Rの書換え規則$\lambda \Leftrightarrow \rho$，$\tau$の出現位置$o$，代入$\theta$があって，以下の条件を満たすとき，かつこのときに限られる．

(1) $\tau/o \equiv \lambda\theta$,

(2) $\upsilon \equiv \tau[o \Leftarrow \rho\theta]$,

(3) $\lambda\theta \succ \rho\theta$.

定義 4.2 Rを項書換え系，τ,υを項，$\succ$を完全簡約順序とする．τがυへ拡張ナローイングされるのは，Rの書換え規則$\lambda \Leftrightarrow \rho$，$\tau$の出現位置$o$，代入$\theta$があって，以下の条件を満たすとき，かつこのときに限られる．

(1) $\tau\theta/o \equiv \lambda\theta$ ただしτ/oは変数でないとする

(2) $\upsilon \equiv \tau\theta[o \Leftarrow \rho\theta]$,

(3) $\lambda\theta \not\preceq \rho\theta$.

例 4.3 $R = \{X+Y \Leftrightarrow Y+X\}$，$\succ$を$a+b \succ b+a$であるような完全簡約順序とする．このとき，項$a+b$は$R$の書換え規則$X+Y \Leftrightarrow Y+X$，出現位置$\varepsilon$，代入$\{a/X,b/Y\}$によって$b+a$へ拡張簡約される．しかし，$b+a$は$R$に関する既約項である．また，$R = \{f(a,X) \Leftrightarrow g(b,Y)\}$，$\succ$を$f(a,a) \not\preceq g(b,Y)$であるような完全簡約順序とする．このとき，項$f(Z,Z)$は$R$の書換え規則$f(a,X) \Leftrightarrow g(b,Y)$，出現位置$\varepsilon$，代入$\{a/X,a/Z\}$によって$g(b,Y)$へ拡張ナローイングされる．

ここで，簡約順序が代入に関して安定であることより，簡約やナローイングが拡張簡約や拡張ナローイングの特殊な場合であることは明らかである．同じ理由により，定理3.3における簡約列とナローイング列の関係は，拡張簡約列と拡張ナローイング列においても成立する．以降においては，無向書換え規則，拡張簡約，拡張ナローイングのことを単に，書換え規則，簡約，ナローイングと呼ぶ．

2つの項$\tau[\sigma]$とλに対して，σとλが単一化可能で，その最汎単一化子がθであるとき，$\tau\theta[\sigma\theta]$を$\tau[\sigma]$とλの重像 (superposition) という．ただし，σは変数でないとする．2つの書換え規則$\tau[\sigma] \Leftrightarrow \upsilon$と$\lambda \Leftrightarrow \rho$の各一辺$\tau[\sigma]$と$\lambda$が重像$\tau\theta[\sigma\theta]$を持ち，$\tau\theta[\sigma\theta] \not\preceq \upsilon\theta$かつ$\lambda\theta \not\preceq \rho\theta$であるとき，この重像はこれらの書換え規則によって，2つの異なる項$\upsilon\theta$と$\tau\theta[\rho\theta]$に簡約される可能性を持つ．これらの項の対を等号で結んだ等式$\upsilon\theta = \tau\theta[\rho\theta]$を，$\tau[\sigma] \Leftrightarrow \upsilon$と$\lambda \Leftrightarrow \rho$から求まる拡張要対 (extended critical pair) という．$\lambda \Leftrightarrow \rho$を書換え規則，$R$を書換え規則の集合とするとき，$cp(\lambda \Leftrightarrow \rho, R)$によって$\lambda \Leftrightarrow \rho$と$R$の各書換え規則から求まるすべての拡張要対を表す．

例 4.4 $f(g(X),X) \Leftrightarrow X, g(h(Y)) \Leftrightarrow Y$を2つの書換え規則とする．左辺同士は，単一化子$\{h(Y)/X\}$による重像$f(g(h(Y)),h(Y))$を持つ．このとき，$f(g(h(Y)),h(Y)) \not\preceq h(Y), g(h(Y)) \not\preceq Y$であることより，拡張要対として$h(Y) = f(Y,h(Y))$が得られる．

ここで，従来の意味での要対[6, 16]が拡張要対に含まれることは明らかである．以降においては，拡張要対のことを

単に要対と呼ぶ.

以下に，E 単一化を行なう手続き $\mathcal{A}_U$ をアルゴリズムの形で示す．簡単のため，$\mathcal{A}_U$ は E 単一化すべき2項 γ, δ と等式の集合 E を引数として入力し，E 単一化子が1つ求まれば，それをリターン値として返して停止する関数として定義されている.

アルゴリズム 1 ($\mathcal{A}_U$)

function $Eunif(\gamma = \delta, E)$ returns 1つの E 単一化子
 /* γ, δ は E 単一化すべき項，E は等式の集合 */
 $R := \phi$ /* 書換え規則の集合 */
 $G := \{(\gamma = \delta, \phi, \mathcal{V}(\gamma = \delta))\}$ /* ゴールの集合 */
 loop
  $(\tau = v) := select(E)$
  $E := E - \{\tau = v\}$
  if $\tau\downarrow_R \neq v\downarrow_R$ then
   $R := R \cup \{\tau\downarrow_R \Leftrightarrow v\downarrow_R\}$
   for *all* $(\gamma_i \doteq \delta_i, \theta_i, V_i) \in G$
    case
     when $\exists \theta'_i$ *s.t.* $\gamma_i\theta'_i \equiv \delta_i\theta'_i$
      $G := G - \{(\gamma_i \doteq \delta_i, \theta_i, V_i)\}$
      return $(\theta_i \cdot \theta'_i)|_{V_i}$ /* 求まった E 単一化子 */
     when $\gamma_i \rightsquigarrow_{R[\theta''_i]} \gamma'_i$
      $G := G \cup \{(\gamma'_i \doteq \delta_i, \theta_i \cdot \theta''_i, V_i)\}$
    end_case
   end_for
   $E := E \cup cp(\tau\downarrow_R \Leftrightarrow v\downarrow_R, R)$
  end_if
 end_loop
end.

アルゴリズム $\mathcal{A}_U$ における R は書換え規則の集合である．等式，代入，変数集合の組をゴールと呼ぶと，G はゴールの集合である．初期状態において R は空であり，G は初期ゴールからなる．ここで初期ゴールとは，E 単一化すべき γ, δ を結んだ等式 $\gamma = \delta$，恒等代入 ϕ，$\gamma = \delta$ に出現する変数集合の組をいう．また，$select(E)$ は E から1つの等式を選択する関数である．この関数は等式の選択に関して公平 (fair) である，つまり E の中にいつまでも選択されずに残るような等式がないことを仮定する.

5 推論規則 $\mathcal{I}_U$ の完全性

前節で述べた無向 E 単一化手続き $\mathcal{A}_U$ の完全性を示すため，以下に $\mathcal{A}_U$ を抽象化した手続き $\mathcal{I}_U$ を推論規則の形で示す．ここで，E は等式の集合，R は書換え規則の集合，G はゴールの集合である．推論規則は，これらの組 $(E;R;G)$ に対して適用される.

推論規則 1 ($\mathcal{I}_U$)

E のための推論規則

E 生成: $\dfrac{(E;R;G)}{(E \cup \{\tau = v\};R;G)}$ $\tau = v$ が R の要対であるとき

E 簡約: $\dfrac{(E \cup \{\tau \doteq v\};R;G)}{(E \cup \{\tau \doteq v'\};R;G)}$ $v \rightarrow_R v'$ であるとき

E 削除: $\dfrac{(E \cup \{\tau = \tau\};R;G)}{(E;R;G)}$

R のための推論規則

R 生成: $\dfrac{(E \cup \{\tau = v\};R;G)}{(E;R \cup \{\tau \Leftrightarrow v\};G)}$

G のための推論規則

G 生成: $\dfrac{(E;R;G \cup \{(\tau \doteq v, \theta, V)\})}{(E;R;G \cup \{(\tau \doteq v, \theta, V), (\tau \doteq v', \theta \cdot \theta', V)\})}$ $v \rightsquigarrow_{R[\theta']} v'$ であるとき

G 削除: $\dfrac{(E;R;G \cup \{(\tau \doteq v, \theta, V)\})}{(E;R;G \cup \{(\Box, (\theta \cdot \theta')|_V, \Box)\}}$ $\tau\theta' \equiv v\theta'$ であるとき

定義 5.1 (推論規則$\mathcal{I}$による演繹) E を等式系，R を項書換え系，G をゴール集合，$\mathcal{I}$ を推論規則の集合とする．$(E;R;G)$ の組に $\mathcal{I}$ の推論規則のいずれか1つを適用し $(E';R';G')$ を得ることを，推論規則 $\mathcal{I}$ の適用といい $(E;R;G) \vdash_{\mathcal{I}} (E';R';G')$ で表す．$(E_0;R_0;G_0) \vdash_{\mathcal{I}} (E_1;R_1;G_1) \vdash_{\mathcal{I}} \cdots$ なる列を $\mathcal{I}$ による演繹という．また，$\cup_i \cap_{j \geq i} E_j$ を E^∞，$\cup_i \cap_{j \geq i} R_j$ を R^∞，$\cup_i \cap_{j \geq i} G_j$ を G^∞ で表し，これらの組 $(E^\infty;R^\infty;G^\infty)$ を演繹の極限と呼ぶ.

E を等号系，γ, δ を E のもとで E 単一化すべき2項とする．推論規則 $\mathcal{I}_U$ による E 単一化の実行とは，初期状態 $E_0 = E, R_0 = \phi, G_0 = \{(\gamma \simeq \delta, \phi, \mathcal{V}(\gamma \simeq \delta))\}$ に対して $\mathcal{I}_U$ による演繹 $(E_0;R_0;G_0) \vdash_{\mathcal{I}} \cdots \vdash_{\mathcal{I}} (E_i;R_i;G_i)$ を得ることである．このとき，G 削除規則によって $(\Box, \theta, \Box)$ なる形のゴールが得られたならば，θ は γ と δ の E 単一化子である．ここでは，$\mathcal{A}_U$ において選択関数 *select* が公平であることを仮定したのと同様に，推論規則 $\mathcal{I}_U$ における E 生成も公平であることを仮定する．推論規則 $\mathcal{I}$ による演繹が公平であるとは，$(E_i;R_i;G_i)$ $(0 \leq i)$ における任意の証明 $\mathcal{P}$ について，$\mathcal{P}$ が正規証明でないならば，$(E_i;R_i;G_i) \vdash_{\mathcal{I}} \cdots \vdash_{\mathcal{I}} (E_j;R_j;G_j)$ なる $(E_j;R_j;G_j)$ $(i<j)$ において $\mathcal{P} \rhd \mathcal{Q}$ なる証明 $\mathcal{Q}$ が存在することをいう．ここで，$\rhd$ は証明上に定まる整礎な順序である．この仮定のもとでの $\mathcal{I}_U$ による E 単一化は，$\mathcal{A}_U$ による E 単一化の一般化になっている．そこで，以降において推論規則 $\mathcal{I}_U$ の完全性を証明することに

より，アルゴリズム $\mathcal{A}_U$ が完全であることを示す．まず $\mathcal{I}_U$ の健全性から示す．

補題 5.2 ($\mathcal{I}_U$の健全性) $(E;R;G) \vdash_{\mathcal{I}_U} (E';R';G')$ とする．このとき，同値関係 $\leftrightarrow_{E\cup R}$ と同値関係 $\leftrightarrow_{E'\cup R'}$ は一致する．

E 単一化の手続きは，既に第3節でみたように任意の証明から正規な証明を得る，証明の変換とみることができる．E を等号系，R を項書換え系，γ,δ を項，θ を $E \cup R$ を法とする γ と δ の E 単一化子とする．$\gamma\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_{E\cup R} \delta\theta$ の証明とは，$\tau_0\Xi_1\tau_1\cdots\Xi_m\tau_m$ なる有限列である．ここで，$\tau_0 \equiv \gamma\theta \simeq \delta\theta$ かつ，ある項 μ が存在し $\tau_m \equiv \mu \simeq \mu$ である．また，Ξ_i $(1 \le i \le m)$ は，$\leftrightarrow_E$, $\rightarrow_R$, $\leftarrow_R$ のいずれかである．たとえば，$1 \le i \le m$ なる i について $\Xi_i \equiv \leftrightarrow_E$，つまり $\tau_{i-1} \leftrightarrow_E \tau_i$ となるのは，E の等式 $\lambda_i \doteq \rho_i$ と τ_{i-1} の出現位置 o_i，代入 θ_i が存在して，$\tau_{i-1}/o_i \equiv \lambda_i\theta_i$ かつ $\tau_i \equiv \tau_{i-1}[o_i \Leftarrow \rho_i\theta_i]$ となるとき，かつこのときに限られる．こういった形の証明は，同じ E,R,γ,δ,θ についても一般に複数存在する．任意の証明に対する変換が正規な証明に至った時点で必ず止まり，任意の具体例について結果が安定するように，証明上に次のような順序を導入する．

$\mathcal{P}$ を $\tau_0\Xi_1\cdots\Xi_m\tau_m$ なる形の証明とする．θ を任意の代入としたとき，$\mathcal{P}\theta$ によって $\tau_0\theta\Xi_1\cdots\Xi_m\tau_m\theta$ なる証明を表す．また，ξ を任意の項としたとき，$\xi[\mathcal{P}]$ によって $\xi[\tau_0]\Xi_1\cdots\Xi_m\xi[\tau_m]$ なる証明を表す．$\mathcal{P}$ の部分証明とは，$\tau_i\Xi_{i+1}\cdots\Xi_j v_j$ $(0 \le i \le j \le m)$ なる形の証明をいい，$\mathcal{Q}$ が $\mathcal{P}$ の部分証明であることを $\mathcal{P}[\mathcal{Q}]$ のように記述する．$\Re$ を証明上の2項関係とするとき，$\Re$ の推移閉包 $\overset{+}{\Re}$ を (証明上の) 順序といい $\rhd$ で表す．任意の証明 $\mathcal{P},\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2$ について $\mathcal{Q}_1 \rhd \mathcal{Q}_2$ ならば $\mathcal{P}[\mathcal{Q}_1] \rhd \mathcal{P}[\mathcal{Q}_2]$ のとき，$\rhd$ は証明の構造に関して単調であるという．任意の証明 $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ と項 ξ について $\mathcal{P} \rhd \mathcal{Q}$ ならば $\xi[\mathcal{P}] \rhd \xi[\mathcal{Q}]$ が成り立つとき，$\rhd$ は項の構造について単調であるという．また，任意の証明 $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ と代入 θ について $\mathcal{P} \rhd \mathcal{Q}$ ならば $\mathcal{P}\theta \rhd \mathcal{Q}\theta$ が成り立つとき，$\rhd$ は代入について単調であるという．$\rhd$ がこれらの性質を同時に持つとき (証明上) 安定な順序といい，安定かつ整礎な (すなわち，$\mathcal{P}_1 \rhd \mathcal{P}_2 \rhd \cdots$ なる無限列が存在しない) 順序を証明順序 (proof ordering) と呼ぶ．

推論規則 $\mathcal{I}$ によって導入される証明上の順序を次のように定義する．$(E_i;R_i;G_i)$ $(0 \le i)$ における任意の証明 $\mathcal{P}$ について，$(E_i;R_i;G_i) \vdash_{\mathcal{I}} \cdots \vdash_{\mathcal{I}} (E_j;R_j;G_j)$ $(i < j)$ なる $(E_j;R_j;G_j)$ において $\mathcal{P}$ に対応する証明 $\mathcal{P}'$ が存在するとき $\mathcal{P} \trianglerighteq_{\mathcal{I}} \mathcal{P}'$ と記述し，$\rhd_{\mathcal{I}}$ を $\mathcal{I}$ によって導入される証明上の順序という．$\mathcal{I}_U$ によって導入される証明上の順序 $\rhd_{\mathcal{I}_U}$ が証明順序となることを示す．準備として，任意の順序の多重集合への拡張について説明する．多重集合 (multiset) とは，要素の重複を許す集合である．たとえば，$\{0,0,1,2,2,2\}$ は自然数の多重集合である．S を任意の集合，$\succ$ をその上の順序とし，$\mathcal{M}(S)$ によって S の要素からなる任意の有限多重集合の全体を表すことにする．$\succ$ により導入される $\mathcal{M}(S)$ 上の多重集合順序 $\succ_M$ とは，次のように定まる順序である[2]．$M_1, M_2 \in \mathcal{M}(S)$ について $X, Y \in \mathcal{M}(S)$ が存在し，$M_1 = (M_2 - X) \cup Y$ かつ任意の $y \in Y$ について $x \succ y$ なる $x \in X$ が存在するとき，$M_1 \succ_M M_2$ である．多重集合順序に関して，次の重要な性質が成り立つ．

定理 5.3 (Dershowitz and Manna[2]) 任意の順序 $\succ$ により導入される多重集合順序 $\succ_M$ が整礎となるのは，$\succ$ が整礎であるとき，かつこのときに限られる．

補題 5.4 $\mathcal{I}_U$ によって導入される証明上の順序 $\rhd_{\mathcal{I}_U}$ は，証明順序である．

(証明概略) まず，証明の各ステップ $\tau\Xi v$ について複雑度 $c(\tau,v)$ を以下のように定める．

$$c(\tau,v) = \begin{cases} \{\tau,v\} & \tau \leftrightarrow_E v\text{のとき} \\ \{\tau\} & \tau \rightarrow_R v\text{のとき} \\ \{v\} & \tau \leftarrow_R v\text{のとき} \end{cases}$$

これを用いて，順序 $\rhd_c$ を次のように定義する．$\mathcal{P},\mathcal{Q}$ を $\mathcal{P} = \tau_0\Xi_{\mathcal{P}_1}\cdots\Xi_{\mathcal{P}_m}\tau_m$，$\mathcal{Q} = v_0\Xi_{\mathcal{Q}_1}\cdots\Xi_{\mathcal{Q}_n}v_n$ なる形の証明とすると，$\mathcal{P} \rhd_c \mathcal{Q}$ となるのは $\{c(\tau_0,\tau_1),\ldots,c(\tau_{m-1},\tau_m)\} \succ^c_M \{c(v_0,v_1),\ldots,c(v_{n-1},v_n)\}$ のとき，かつこのときに限られる．ここで，$\succ^c_M$ は複雑度上の順序 $\succ^c$ により導入される多重集合順序である．また，複雑度の上の順序 $\succ^c$ は簡約順序 $\succ$ により導入される多重集合順序 $\succ_M$ である．$\succ$ が項の上で安定かつ整礎であることより，$\succ_M$ つまり $\succ^c$ は項の多重集合上で安定かつ整礎となり，これによる順序 $\succ^c_M$ つまり $\rhd_c$ は証明上で安定かつ整礎となる．つまり $\rhd_c$ 証明順序である．$\rhd_{\mathcal{I}_U}$ を $\rhd_c$ ととれば，$\rhd_{\mathcal{I}_U}$ は証明順序である．■

$\mathcal{I}_U$ の演繹が公平となるための十分条件は，次のように定まる．

補題 5.5 演繹 $(E_0;R_0;G_0) \vdash_{\mathcal{I}_U} (E_1;R_1;G_1) \cdots$ について，$\{\tau = v | \tau = v\text{は}R^\infty\text{における任意の要対}\} \subset \cup_k E_k$ となるならば，演繹は公平である．

$\mathcal{I}_U$ の演繹が公平であることを仮定すると，証明順序が整礎であることより以下の補題が導かれる．なお基礎証明とは証明で，かつ証明の途中に出現する項がすべて基礎項で

あるものをいう．

補題 5.6 $\mathcal{I}_U$ による演繹は公平であるとする．$(E_i;R_i;G_i)$ $(0\leq i)$ における任意の基礎証明 $\mathcal{P}$ について，$\mathcal{P}$ が正規証明でないならば，$(E_j;R_j;G_j)$ $(i\leq j)$ において $\mathcal{P} \rhd_{\mathcal{I}_U} \mathcal{Q}$ なる基礎証明 $\mathcal{Q}$ が存在し，$\mathcal{Q}$ は正規証明である．

つまり $\mathcal{I}_U$ の演繹によって，正規でない任意の基礎証明について，必ず正規な基礎証明が得られることが保証される．これは一種の局所合流性とみることができる．また，簡約の定義より R は常に停止的であるため，以下のような基礎合流性を導くことができる．

補題 5.7 (基礎合流性) E を等号系，R を項書換え系，$\succ$ を完全簡約順序とし，$\mathcal{I}_U$ による演繹は公平であるとする．このとき，$E_0 = E, R_0 = R, G_0 = \phi$ からの演繹 $(E_0;R_0;G_0) \vdash_{\mathcal{I}_U} \cdots (E_1;R_1;G_1)$ によって，R^∞ は停止性に加えて基礎合流性を持つ．つまり，R^∞ は基礎項の上で完備である．

定理 5.8 (推論規則$\mathcal{I}_U$の完全性) E を等号系，γ, δ を E を法として E 単一化可能な2項，θ をその E 単一化子，$\succ$ を完全簡約順序とし，$\mathcal{I}_U$ による演繹は公平であるとする．このとき，$\mathcal{I}_U$ は γ, δ, E を入力とし，θ について $\theta_0 \preceq_E \theta$ かつ正規である代入 θ_0 を含んだゴール $(\square, \theta_0, \square)$ を G_k $(0\leq k)$ において生成する．

6 実験

ICOT における知的プログラミングシステムの研究開発において，項書換えは重要な基盤技術の一つとして位置づけられている[19]．*Metis* は，項書換えに基づくさまざまな推論技術の研究を目的として，PSI 上に開発された実験環境である[11]．無向 E 単一化手続きについては，反駁型定理証明の拡張として実現されている．

例 6.1 (恒等コンビネータ) コンビネータ論理において，恒等コンビネータ I は $S * K * K$ によって定義される．$E = \{s * X * Y * Z = X * Z * (Y * Z), k * X * Y = X\}$ として，E のもとで $X * f(X) = f(X)$ の E 単一化を試みる．

$E_0 = \{kXY = X, sXYZ = XZ(YZ)\}$

$R_0 = \phi$

$G_0 = \{(Xf(X) = f(X), \phi, \{X\})\}$

$E_1 = E_0 - \{kXY = X\}, R_1 = \{kXY \Leftrightarrow X\}, G_1 = G_0$

$E_2 = \phi, R_2 = R_1 \cup \{sXYZ \Leftrightarrow XZ(YZ)\}, G_2 = G_1$

$E_3 = \{skXY = Y\}, R_3 = R_2, G_3 = G_2$

$E_4 = \phi, R_4 = R_3 \cup \{skXY \Leftrightarrow Y\}, G_4 = G_3$

$E_5 = \phi, R_5 = R_4, G_5 = G_4 \cup \{(f(skX') = f(skX'), \{skX'/X\}, \{X\})\}$

$E_6 = \phi, R_6 = R_5, G_6 = G_4 \cup \{(\square, \{skX'/X\}, \square)\}$

このように，E 単一化子として $\theta = \{skX'/X\}$ を求めることができる．これは一般の恒等コンビネータの定義より汎用となっているが，$(s * k * X) * Y$ を s, k を用いて計算してみると，$(s * k * X) * Y = k * Y * (X * Y) = Y$ となり，実際にこれが恒等コンビネータになっていることがわかる．つまり，通常我々が用いる定義はここで得た恒等コンビネータの具体例である．

7 おわりに

本稿では，完備な項書換え系を前提としない E 単一化手続きについて述べた．この手続きは任意の等式系に対して完全である．ここでは完全性の証明を証明変換によって行なったため，完全性を損なわずに，提案した手続きをさらに洗練させることも容易である．また，推論規則を変更し，新たな E 単一化手続きを構築した際にも，ここで用いた枠組によって完全性を検証することが可能である．

E 単一化は，等式定理の反駁証明とほぼ同様の推論を必要とするので，実現における効率化は大きな課題である．しかし，[5] が等号系を向き付けることなしに用いているのに比べれば，$\mathcal{I}_U$ は拡張簡約や拡張ナローイング，拡張要対など，手続きの多くの箇所で順序比較による適用基準を設けていることで，十分効率化がなされている．また，多くの完備化手続きが，書換え規則の簡約を行って実行を効率化しているのと同様に，$\mathcal{I}_U$ においても R の簡約を行ない，手続きをさらに効率化することができる．これは，R のための推論規則に以下を追加して実現される．

$$\text{R 簡約: } \frac{(E; R \cup \{\lambda \Leftrightarrow \rho\}; G)}{(E; R \cup \{\lambda \Leftrightarrow \rho'\}; G)} \quad \lambda \succ \rho \text{ かつ } \rho \rightarrow_R \rho' \text{ であるとき}$$

$$\text{R 削除: } \frac{(E; R \cup \{\lambda \Leftrightarrow \rho\}; G)}{(E \cup \{\lambda' \doteq \rho\}; R; G)} \quad \lambda \not\preceq \rho \text{ かつ } \lambda \rightarrow_{R[o,\gamma \Leftrightarrow \delta,\theta]} \lambda'$$

のとき，ただし $\gamma\theta \succ \delta\theta$ かつ $\lambda \rhd \gamma$ または $o \neq \varepsilon$ である

また，以下のような G に対する簡約規則をいれて $\mathcal{I}_U$ を効率化することも可能である．

$$\text{G 簡約: } \frac{(E; R; G \cup \{(\tau \doteq v, \theta, V)\})}{(E; R; G \cup \{(\tau \doteq v', \theta, V)\})} \quad v \rightarrow_R v' \text{ であるとき}$$

証明順序をうまく拡張すれば，この手続きの完全性も容易に示すことができる[13]．他の効率化の技術として，基底を用いることも考えられる．簡約やナローイングに対する基底の導入は，無駄な処理を構文的な判定基準によって除去するため，実現に適した効率化技術といえる．基底ナローイングに簡約を組み合わせても完全であるような正規

化基底ナローイングについて[15]が報告している．筆者らは[12]において，項にある種のマークをつけることで，基底簡約や正規化基底ナローイングが効率よく実現できることを示した．今後は，E単一化にこの種の効率化手法を取り入れた際の完全性について検討していく予定である．

謝辞

本研究は，第5世代コンピュータプロジェクトの一環として行なわれたものである．研究の機会を与えて下さった新世代コンピュータ技術開発機構 長谷川第一研究室長ならびに(株)東芝 システム・ソフトウェア技術研究所 高橋部長に感謝する．また，日頃ご指導いただいている(株)東芝 システム・ソフトウェア技術研究所 楠井研究主務，本位田研究主務に深謝する．

参考文献

[1] Bachmair, L., Dershowitz, N., and Hsiang, J.: Orderings for equational proofs, in *Proc. 1st IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, (1986), pp. 346–357.

[2] Dershowitz, N. and Manna, Z.: Proving termination with multiset orderings, *Comm. ACM*, Vol. 22, No. 8 (1979), pp. 465–467.

[3] Dershowitz, N.: Termination, in *Proc. 1st Int. Conf. Rewriting Techniques and Applications*, Lecture Notes in Computer Science 202, Springer–Verlag (1985), pp. 180–224.

[4] 二木厚吉, 外山芳人: 項書き換え型計算モデルとその応用, 情報処理, Vol. 24, No. 2 (1983), pp. 133–146.

[5] Gallier, J. and Snyder, W.: A General complete E–unification procedure, in *Proc. 2nd Int. Conf. Rewriting Techniques and Applications*, Lecture Notes in Computer Science 256, Springer–Verlag (1987), pp. 216–227.

[6] Huet, G. and Oppen, D. C.: Equations and Rewrite Rules: A Survey, *Formal Languages: Perspective and Open Problems* (Book, R. ed.), Academic Press (1980), pp. 349–405.

[7] Hullot, J. M.: Canonical forms and unification, in *Proc. 5th Int. Conf. on Automated Deduction*, Lecture Notes in Computer Science 87, Springer–Verlag (1980), pp. 318–334.

[8] Knight, K.: Unification: A Multidisciplinary Survey, *Compt. Surv.*, Vol. 21, No. 1 (1989), pp. 93–124.

[9] Knuth, D. E. and Bendix, P. B.: Simple word problems in universal algebras, *Proc. Computational problems in abstract algebra* (Leech, J. ed.), Pergamon Press, Oxford (1970), pp. 263–297 ;also in *Automation of Reasoning 2* (Siekmann, J. H. and Wrightson eds.), Springer–Verlag (1983), pp. 342–376.

[10] Martelli, A. and Montanari, U.: An efficient unification algorithm, *ACM Trans. Prog. Lang. Syst.*, Vol. 4, No. 2 (1982), pp. 258–282.

[11] Ohsuga, A. and Sakai, K.: Metis: A Term Rewriting System Generator, in *Proc. Symposium on Software Science and Engineering*, RIMS (1986) also Tech. Memorandum TM–0226, ICOT (1986).

[12] Ohsuga, A. and Sakai, K.: An Efficient Implementation Method of Reduction and Narrowing in Metis, in *Proc. 2nd Int. Workshop on Unification* (1988); also Tech. Memorandum (to appear).

[13] 大須賀昭彦, 坂井公: E単一化子の完全集合を求める推論規則, Tech. Report, ICOT (準備中).

[14] Plotkin, G.: Building-in equational theories, *Machine Intelligence* (Meltzer, B. and Michie, D. eds.), volume 7, American Elsevier (1972), pp. 73–90.

[15] Réty, P.: Improving basic narrowing techniques, in *Proc. 2nd Int. Conf. Rewriting Techniques and Applications*, Lecture Notes in Computer Science 256, Springer–Verlag (1987), pp. 228–241.

[16] 坂井公: Knuth–Bendixの完備化手続きとその応用, コンピュータソフトウェア, Vol. 4, No. 1 (1987), pp. 2–22.

[17] Sakai, K.: An ordering method for term rewriting systems, Tech. Report TR–062, ICOT (1984).

[18] Sakai, K.: Knuth–Bendix algorithm for Thue system based on kachinuki ordering, Tech. Memorandum TM–0087, ICOT (1985).

[19] Sakai, K.: Toward Mechanization of Mathematics – Proof Checker and Term Rewriting System –, *Programming of Future Generation Computers* (Fuchi, K. and Nivat, M. eds.), North–Holland (1988), pp. 335–390.

[20] Siekmann, J. H.: Unification Theory, *J. Symbolic Computation*, Vol. 7 (1989), pp. 207–274.