失敗集合に基づく並列論理型プログラムの不動点的意味論

A Fixpoint Semantics of Parallel Logic Programs based on Failure Set

村上 昌己
Masaki Murakami
（財）新世代コンピュータ技術開発機構研究所
Institute for New Generation Computer Technology

1　はじめに

近年 GHC の様な commited choice 型の並列言語についての形式的意味論について、いくつかの結果が報告されている [村上 a], [Falaschi]。筆者は先に Flat GHC プログラムの意味論として、実行中にボディ部分での単一化が失敗する可能性のあるゴールの集合のモデル論的な特徴付けについて述べた [村上 b]。本稿では Flat GHC プログラム上意味論をプログラムから定まるある連続関数の最小不動点によって与える。

2　ガード付ストリーム

Varを可算無限個の変数の集合，Fun を関数記号の集合とする．Funの各要素に対しては arity がそれぞれ定まっているものとする。VarとFunの元から通常のように定まる項の集合を$Terms$であらわす。項τが単純であるとは、τが変数項であるか、arity が 0 の関数記号であるか，$f(X_1,\ldots,X_n)$ の形で$f \in Fun$ かつ $X_1,\ldots,X_n$ が異なる変数である場合をいう．

$Terms$ の上の代入は通常通り定義される。

[定義 1]

$X \in Var, \tau$を単純な項とするとき，$X = \tau$を代入式という．$X = X$という式は$true$と表記する．

単純な代入式の有限集合を用いて代入を表現することができる．しかしながら一般に単純な代入式の有限集合が常に代入を定めるわけではない．

以下，代入式の集合とそれが定める代入とを同一視する。

[定義 2]

σ を単純な代入式の集合とする．σ が代入であるか又は、ある代入 θ に対して以下のように定義される$\bigcup_{k\to\infty}\theta_k$ に等しいとき、σ をω代入とよぶ．

$\theta_0 = \theta$

$\theta_{k+1} = \theta_k \cup \{X = \tau|$ ある$(Y = \tau') \in \theta_k$が存在し、
Xはτ'に出現し、$(X = \tau'') \notin \theta_k$かつ、
τに出現するすべての変数についてθ_k
のいかなる元にも出現しない．$\}$

ω代入は無限項の上の写像を定義する．

I/O 履歴はプロセスの呼ばれたときの形を表わすヘッド H とプロセスのある実行における入出力を示す GU を用いて$H :- GU$のように表わされる．ここでHは互いに異なる変数に述語記号を適用したもの，GU はある節にコミットするまでに通過するガードを解くのに必要な代入 σ とコミットした節のボディ部での単一化の実行を表す式 U_k の対 $<\sigma|U_k>$ の集合である．直観的には H という形のゴールの引数が σ によって具体化されると U_k という単一化が行われることを意味する．

Hの一つの I/O 履歴はプロセスHの可能な実行の一つを表わす．したがって，実行中に異なる節にコミットする可能性がある場合は，異なる I/O 履歴が存在する．また，同じ節にコミットした実行でも，並列に走っているプロセスのスケジューリングによって異なる I/O 履歴が存在する可能性がある．

ここではボディ部分での単一化が失敗する計算は U_k のかわりに $\bot$ を含むガード付ストリームによって表現される。

[定義 3]

$X \in Var, \tau$を単純な項とするとき，$X? = \tau$のような式を判定式という．

[定義 4]

代入σ，変数X，単純な項τについて，$uni(X,\tau)$を代入式 $X = \tau$ または 判定式$X? = \tau$とするとき、$<\sigma|U>$をガード付代入とよぶ．ここでUは $uni(X,\tau)$ または記号 $\bot$とする。σを$<\sigma|U>$のガード部，Uを能動部とよぶ．

直観的には$uni(X,\tau)$が代入式であったときは実際にXを具体化する単一化に，判定式であった場合はテスト・ユニフィケーションに対応する。

また能動部に$\bot$が出現したときは、コミットした節のボディ部分での単一化が失敗したことを表わす。

$<\sigma|U>$をガード付代入とする．$|<\sigma|U>|$は判定式又は代入式の集合で、U が判定式又は代入式のときは$\{U\}\cup\sigma$に、又$U = \bot$ のときはσのように定義される．

プログラムのある動作を表現するガード付代入の集合 GU は、実行順序に関して半整列集合となっている．

[定義 5]

与えられたガード付代入の集合GUの上に次のような関係$\prec$を定義する．$<\sigma_1|u_1>, <\sigma_2|u_2> \in GU$とする．$\sigma_1 \subset \sigma_2$ かつ $\sigma_1 \neq \sigma_2$ のとき、$<\sigma_1|u_1> \prec <\sigma_2|u_2>$ とする．このように定義された関係$\prec$が半整列集合になることは容易に示せる．

[定義 6]

ガード付代入の集合 GU が次の条件をみたすとき，ガード付ストリームとよぶ．

1) $<\sigma_1|U_1>, <\sigma_2|U_2> \in GU, <\sigma_1|U_1> \neq <\sigma_2|U_2>$ かつU_1とU_2が同じ左辺をもつならば、少なくとも一方は判定式であり，右辺は単一化可能．またU_1が代入式でU_2 が判定式であったとき $<\sigma_2|U_2> \prec <\sigma_1|U_1>$ でない．

2) 任意の $<\theta|X = \tau> \in GU$ について、$<\sigma|U> \in GU$ ならば、$(X = \tau) \notin \sigma$.

3) 任意の $<\theta|X? = \tau>, <\sigma|U> \in GU$について、$\tau$ と τ' が単一化不能ならば、$(X = \tau') \notin \sigma$.

4) 任意の $<\sigma_1|u_1>, <\sigma_2|u_2> \in GU$について、$(X = \tau) \in \sigma$ かつ $(X = \tau') \in \sigma'$ ならば、τ と τ' は単一化可能。

次の概念は、並列に走る複数のゴールを含むようなゴール節について、各ゴールの動きを記述するガード付ストリームから、全体の動作を記述するガード付ストリームを得る操作を定義している．以下ではUは代入式、判定式、または$\bot$であるとする。

[定義 7]

$GU_1,\ldots,GU_n$ をガード付きストリームとする．$Gu_k(1 \leq k)$ を次のように定義する．

$$Gu_1 = \{<\sigma|U> \mid \exists i, \exists <\sigma|U> \in GU_i, \forall (X = \tau) \in \sigma, \forall j, <\sigma'|X = \tau> \notin GU_j\}$$

$$
\begin{aligned}
Gu_{k+1} = Gu_k \cup &\\
&\{<\sigma|U> \mid \exists i, \exists <\sigma'|U> \in GU_i, \forall (X=\tau) \in \sigma',\\
&\ ((\forall j, <\sigma''|X=\tau> \notin GU_j) \vee\\
&\ \ <\sigma''|X=\tau> \in Gu_k) \wedge\\
&\ \sigma = (\sigma' - \{X=\tau \mid <\sigma''|X=\tau> \in Gu_k\}) \cup\\
&\ \ \ \{U \mid U \in \sigma'' <\sigma''|X=\tau> \in Gu_k\}\}
\end{aligned}
$$

このとき、$GU = \bigcup_{k=\infty} Gu_k$ とする。このGUがガード付ストリームになり、かつ$\{U \mid <\sigma|U> \in GU\} = \{U \mid \exists i <\sigma|U> \in GU_i\}$ のとき、GUを $GU_1, \ldots, GU_n$の両刃付マージとよび、

$$GU_1 \| \ldots \| GU_n$$

であらわす.

[定義 8]

GUをガード付ストリーム、Vを変数の有限集合とする. ここでGUのVによる制限$GU \downarrow V$を $GU \downarrow V = \{<\sigma|uni(X,\tau)> \mid \exists k <\sigma|uni(X,\tau)> \in GU, X \in V_k\}$ で定義する。ここで、

$$
\begin{aligned}
V_0 &= V\\
V_{i+1} &= V_i \cup \{X \mid \exists gu \in GU,\\
&\quad \exists uni(Y,\tau) \in |gu|, X\text{は}\tau\text{に含まれ}Y \in V_i,\\
&\quad \text{かつ}\forall gu' \in GU, gu' \prec <\sigma|U> \text{ならば}\\
&\quad X\text{は}gu'\text{に現れない.}\}
\end{aligned}
$$

とする。GUがガード付ストリームのとき、$GU \downarrow V$もガード付ストリームとなる.

[定義 9]

GUをガード付ストリーム, θを単純な代入式の集合とするとき、θとGUから定まる次の集合がやはりガード付ストリームとなるとき、$GU \bowtie \theta = \{<\sigma|U_i> \mid <\sigma'|U_i> \in GU, \sigma = \theta \cup \sigma'\}$とする。

[定義 10]

述語記号の集合を$Pred$ とする。$H, B_1, B_2, \ldots, B_n$ を $Pred$, $Terms$ から作られる原子式. かつHの引数部に出現するのは全て異なる変数. U_{gs}, U_{bt} を単純な代入式とする. このとき次の節:

$$H :- U_{g1}, \ldots, U_{gm} | U_{b1}, \ldots, U_{bh}, B_1, B_2, \ldots, B_n$$

をガード付節とよぶ. ガード付節の有限集合をプログラムとよぶ. 以下では, $Var(p(X_1, X_2, \ldots, X_k)) = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$とする.

[定義 11]

p を arity k の $Pred$ の元、$X_1, X_2, \ldots, X_k$ を互いに異なる変数、σ を ω 代入とするとき、$\sigma p(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ はゴールである。

単一化はいきなりは現われないことに注意されたい。

[定義 12]

ゴール$g_i (1 \leq i \leq n)$ の並び $g_1, \ldots, g_n$ はゴール節である。

[定義 13]

GUをガード付きストリームとする。I/O 履歴 t とは次のようなものである。

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_k) :- GU$$

ここで$p \in Pred$ でアリティ k、かつ$X_1, X_2, \ldots, X_k$ は互いに異なる変数であり、$GU \downarrow Var(p(X_1, X_2, \ldots, X_k)) = GU$.

ここで $p(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ を t のヘッド部分, GUをボディ部分とよぶ。以下では、Fun, Var, $Pred$ から定まるすべてのI/O履歴の集合の変数名のつけかえによる同値類から、適当な代表元を選びだした集合を $I/Ohist$ で表す。

3 不動点的意味論

本節ではプログラムDについて、その要素とω成功集合, M^D_∞[村上 a] から定まる$I/Ohist$のべキ集合IP上の関数を示す。IPは集合の包含関係のもとで完備束となり、最大元は$I/O-hist$、最小限は空集合ϕである。

[定義 14]

ガード付き節の有限集合 Dについて、集合 $Base_D$ を次の様に定める。

$$
\begin{aligned}
Base_D = \{&H :- \{<\sigma|\perp>\} \mid\\
&H :- U_{g1}, \ldots, U_{gm} |\\
&\quad U_{b1}, \ldots, U_{bh}, B_1, \ldots, B_n \in D\\
&\text{について}U_{b1}, \ldots, U_{bh} \text{が } H \text{ を通して}\\
&\text{外部から見える変数への具体化を含むか、}\\
&\text{又は二つの代入}\{U_{g1}, \ldots, U_{gm}\}, \{U_{b1}, \ldots, U_{bh}\}\\
&\text{によって具体化される変数の集合が}\\
&\text{空でない共通部分を持ち、かつ両者の}\\
&\text{具体化の結果同士が単一化できない。}\}
\end{aligned}
$$

このとき D から定まる関数 $\Psi_D : IP \rightarrow IP$ を次の様に定義する。

$$
\begin{aligned}
\Psi_D(S) = Base_D \cup &\\
&\{H :- \{<\{U_{g1}, \ldots, U_{gm},\}|U_{b1}>, \ldots,\\
&\quad <\{U_{g1}, \ldots, U_{gm},\}|U_{bh}>\} \cup\\
&((GU_1 \| \ldots \| GU_n) \bowtie \{U_{g1}, \ldots, U_{gm}\}) \downarrow Var(H) \mid\\
&H :- U_{g1}, \ldots, U_{gm} | U_{b1}, \ldots, U_{bh}, B_1, \ldots, B_n \in D\\
&\text{について } H \text{ から見えない変数を具体化せず、}\\
&B_1, \ldots, B_n\text{を}(S, M^D_\infty)\text{で真とするような}\omega\text{代入}\sigma\\
&\text{が存在し、}GU_i\text{は}\sigma B_i \text{ というゴールの}\\
&\text{トレース}(\in S \cup M^D_\infty) \text{ のボディ部分.}\}
\end{aligned}
$$

[命題]

$\Psi_D(S)$ は上向きに$\omega-$連続である。

鎖$S_i : S_1 \subset S_2 \subset \ldots$について、$S_i$の最小上界を $\bigcup S_i$ で表わすことにする。上の命題により$\Psi_D(S)$の最小不動点は

$$\bigcup \{\Psi^n_D(\phi) | n \geq 0\}$$

により表わされることがわかる。これをプログラムDの⊥意味論と呼ぶ。

4 おわりに

本論文では Flat GHC プログラムの⊥意味論を、ある連続関数の最小不動点として与えた。これは [村上 b] で示した最小 ⊥ モデル, $M^D_\perp$に等しいことが示される。この集合は、外部との通信をしながら実行している途中に、コミットした節のボディ部分で単一化に失敗する可能性のあるゴール節の集合を特徴付けている。

参考文献

[Falaschi] Falaschi, M. and G. Levi, Finite Failures and Partial Computations in Concurrent Logic Languages, Proc. of Int. Conf.on Fifth Generation Computer System '88, 1988

[村上 a] M. Murakami, A New Declarative Semantics of Parallel Logic Programs with Perpetual Processes, Proc. of Int. Conf.on Fifth Generation Computer System '88, 1988

[村上 c] 村上, 失敗集合に基づく並列論理型プログラムの宣言的意味論, 信学技報, COMP 88-69, 1988