ICOT Technical Memorandum: TM-0608

TM-0608

非単調推論による高次推論の形式化

有馬淳

October, 1988

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03) 456-3191～5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

非単調推論による高次推論の形式化

Formalization of Advanced Inference as Nonmonotonic Reasoning

有馬　淳

(財)新世代コンピュータ技術開発機構
〒108 東京都港区三田一丁目四番二十八号
三田国際ビル二十一階
☎(03)456-2514

[内容梗概]

新たな事実が導入される可能性のある環境では、論理的飛躍のあるいかなる推論も、無矛盾性を保つために非単調な性質を持たざるをえない。非単調推論として研究が進められてきた暗黙的推論(default reasoning)のみならず、帰納的推論や類推等の高次の推論もまたその例外ではない。本研究では、様々な高次の推論を非単調推論として捕らえることによって、統一的な形式化を目指す。高次の推論の統一的形式化は、明瞭な議論のもとでの様々な推論の比較や考察を可能とし、高次の推論の健全な発展に寄与するものと期待できる。

モデル間にし好を表す順序を導入することによって、非単調推論は「もっとも好ましい」モデル上での推論として形式化される。ここで提案する含意限定(ascription)は離散的な順序に基づいた形式化で、知的システムによる仮説生成などの高次の推論の形式化に適していると考えられる。

[ABSTRACT]

Under the circumstances in which it is possible to introduce new axioms, any reasoning which jumps to conclusions will be forced to have a nonmonotonic property to maintain consistency. Induction and analogy as well as default reasoning are no exceptions.

This paper attempts to formalize such conjectural reasoning processes uniformly as nonmonotonic reasoning. General formalization is expected to enable us to compare various types of conjecrural reasoning and to consider them under formal arguments, and it will contribute to the sound progress of research on human inference.

Introducing an order of preference over models, nonmonotonic reasoning can

be formalized as inference on the most preferred models. Ascription proposed in this paper is a form of nonmonotonic reasoning based on discrete order over models, and it realizes a "sweeping" belief revision which is suitable for managing conjectures made by an intelligent system.

1. まえがき

人間の行う推論は必ずしも論理的(演繹的)なものではなく、ある種の論理的飛躍がある場合がある。それら非演繹的な推論は、類推や帰納[1,2]、暗黙推論(default reasoning)[3,13,15]、発想[5]等、幾つかの分類が行われ研究されてきた。しかし、新たな事実が常に導入される可能性のある環境では、論理的飛躍のあるいかなる推論結果も、新しい事実と矛盾を起こす可能性がある。無矛盾性を保つためには、必要に応じかつて定理だったもの(推論結果)が新しい知識のもとで定理でなくなることを認めなければならない。知識(公理)の増加が必ずしも定理の増加につながらないこのような推論の性質をわれわれは非単調(nonmonotonic)と呼んでいる[13]。つまり、非演繹的な推論はどれも非単調な性質を持たざるを得ないのである。

非単調推論の形式としては極小限定(circumscription[10,11,12])があげられる。極小限定は、閉世界仮説的な考え方、『ある性質を満たすものは、述べられているもの以外存在しない』との考えを定式化したものである。しかし、こういった考え方は人間の多様で豊かな推論のほんの一部しか説明していない。今なお人間の推論には無視できぬ大変重要な側面が残されている。それは類推や帰納等で表される、学習や認識に密接に関係した高次の推論である。

本論文†では、このような高次の推論の形式を細分化して論ずるのではなく、より一般的に(時には演繹さえも含めて)無矛盾性を保つ推論の形式について論じる。高次の推論の統一的形式化は、明瞭な議論のもとでの様々な推論の比較や考察を可能とし、高次の推論の建設的な発展に役立つと考えるからである。2章では演繹から高次推論まで捕らえることのできる非単調推論の一般的な形式について述べることにする。これは極小限定で導入された(述語の外延の包含関係に基づいた)モデル間の順序構造の考え方を発展させ抽象化したものであるが、今後の議論、研究を見通しよく展開する上で重要なものであると考える。その形式ではどういった順序を採用するかが主要な問題点となる。ここでは高次の推論を一般的に捕らえることを目的とし、含意限定(ascription)と呼ぶ論理的枠組みを提案す

---

† 本論文で報告する研究は文献[4]で紹介した研究を発展、修正したものである。

る。直観的に言うと、含意限定は『現在の知識で、Pと分かっているものが、すべてΨの性質を持っているならば、Pの性質を持つものはすべてΨの性質を持つ。また逆に、Pではないと分かっているものが、すべてΨの性質を持っていないならば、Pの性質を持たないものはすべてΨの性質を持たない』との考えを定式化したものである。少し言い換えると、Pのポジティブな例がすべてΨの性質を持っているとPであればΨの性質を持つと推論し、Pのネガティブな例がすべてΨの性質を持っていないとPでなければΨの性質を持たないと推論するというものである。3章で含意限定の厳密な定義を与える。4章では極小限定との比較をモデル論に即して説明し、含意限定に適した応用について述べる。

2. 非単調推論の定式化

本稿で使用するいくつかの記法について説明する。ボールドでかかれた英文字は、有限個の記号列を表す。例えば$\mathbf{P(x)}$は、適当な数の引数を持つ有限個の述語列、$P^1(x^1{}_1,\cdots,x^1{}_{n_1}),\cdots,P^m(x^m{}_1,\cdots,x^m{}_{n_m})$を表す。また、ここで"述語"とは一般に、$\lambda\mathbf{x}.(W(\mathbf{x}))$で表されるものを考える。ここで、$W(\mathbf{x})$は整式(well-formed formula)であり、$\mathbf{x}$は個体変数で、$W(\mathbf{x})$中で自由に現れているとする。他の自由な現れは定数と見なす。そのほかの記法は一般的なものに準ずる。

次に一つの一般的な非単調推論の形式を与え、それをもとに今後の議論を進めることにする。
述語間に嗜好(preference)を表す擬順序(pseudo-order)"≧"を導入し、この関係を"嗜好順序"と呼ぶことにする†。(つまり、嗜好順序は反射律、推移律は成り立つが、反対称律は必ずしも成り立つ必要はない。)$\mathbf{K_1}$、$\mathbf{K_2}$を同数項の述語または関数の組とするとき、「$\mathbf{K_1}$が$\mathbf{K_2}$より好ましい($\mathbf{K_1}$ is preferred over $\mathbf{K_2}$)」ことを"$\mathbf{K_1} \geq \mathbf{K_2}$"で表すことにする。この時、ある述語定数または関数定数からなる組$\mathbf{K}$の各要素が現れる述語論理式Aにおいて、先の嗜好順序に従って「最も好ましい」解釈を$\mathbf{K}$に与える。これは、次の式により表すことができる。

$$A \wedge \neg\exists \mathbf{p}.(\,A(\mathbf{p}) \wedge \mathbf{p} > \mathbf{K}\,).\dagger \qquad \textbf{(A1.1)}$$

ここで、$\mathbf{p}$は述語または関数変数の組であり、$A(\mathbf{p})$は$\mathbf{A}$における$\mathbf{K}$の要素の現れを同時にすべて対応する$\mathbf{p}$の要素に置き換えたものである。また、">"は次の略記法である。即ち、$\mathbf{K_1} > \mathbf{K_2}$は$\mathbf{K_1} \geq \mathbf{K_2}$であってかつ$\mathbf{K_2} \geq \mathbf{K_1}$でないことを意味す

---

† (A1.1)式はもともとJ.McCarthyの極小限定(circumscription)[11]に根ざしているが、嗜好順序の導入による一般的な見方は文献[6,9,16]に報告されている。

るものとする。さて、(A1.1)の意図的な意味は、与えられた論理式Aに対し、それ以下の論理式によって次の制限を加えることである。すなわち、Aを満足する述語でKより好ましい述語は存在しないということである。もちろん、(A1.1)によって規定されるKの意味は必ずしも一意ではないし、また、Aと嗜好順序の組合せによっては(A1.1)は充足不能になる。(A1.1)は、Kが嗜好順序に関して(もしあるとすれば)極大の値をとるということを宣言的に表したものにすぎない。しかし、この形式は多くの推論を捕らえるものとして有効である。嗜好順序によって与えられた知識のもとで、もっとも好ましい解釈を述語に与えることは、まさに、与えられた知識のモデルの集合のうちから、好ましい解釈を持つモデルを選択していることにほかならない。Aと無矛盾ないかなる式もAのいくつかのモデル上での論理的帰結となるから、どんな無矛盾な推論もAのモデル集合のある空でない部分集合上での論理的帰結として捕らえることができるはずである。その部分集合がAのモデル集合全体と一致するとき、すなわち、Aのモデルすべてが極大的に好ましくなる順序構造を導入すると、その推論は演繹を表すことになり、そうでないとき、なんらかの論理的飛躍のある非演繹的な推論となる。もちろん、このような一般的な定式化がすべての問題を解決しているわけではない。人間の行うような非演繹的推論の定式化を試みる理論では、何を好ましいとするか、その好ましさをどう定式化するかが主要な問題となる。次章以降では実際にある順序構造を与え、含意限定と呼ぶ論理式を提案しその性質について議論を行う。

3. 含意限定

3.1. 定式化

含意限定は、『現在の知識で、Pと分かっているものが、すべてΨの性質を持っているならば、Pの性質を持つものはすべてΨの性質を持つ。また逆に、Pではないと分かっているものが、すべてΨの性質を持っていないならば、Pの性質を持たないものはすべてΨの性質を持たない』との考えを定式化したものである。この考えに照らして嗜好尺度をいれると、もしPの解釈をPでありかつΨである解釈とできる場合はその解釈を好む、すなわち、Pの解釈をPとΨの外延の共通部分(積集合)とする解釈が可能ならば、その解釈を好むということになる。また、Pでない解釈をPでなくかつΨでない解釈とできる場合はその解釈を好むとしたい。これはPの解釈をPとΨの外延の和集合とする解釈が可能ならば、その解釈を好むということと等価である。以上のことから含意限定が得られる。

Pを述語記号のn個組、Zを述語記号または関数記号のk個組(混じってよい)、どんな記号もP,Zに高々一度しか現れないとし、ΨをP,Zのいかなる述語記号もあらわれないn個組の述語とする。以下、本論文中で現れるP、Z、Ψはこの条件を

満たすものとする。この時、**Z**を可変とした**P**のΨへの含意限定は、**(A1.1)**において、次の嗜好順序を入れたものである。

$$
\begin{aligned}
&P_1,Z_1 \geqq P_2,Z_2 \\
&\text{iff}\quad (\forall x.(P_1{}^1(x) \equiv P_2{}^1(x) \wedge \Psi^1(x)) \vee \forall x.(P_1{}^1(x) \equiv P_2{}^1(x) \vee \Psi^1(x))) \\
&\quad \wedge \cdots \\
&\quad \wedge (\forall x.(P_1{}^n(x) \equiv P_2{}^n(x) \wedge \Psi^n(x)) \vee \forall x.(P_1{}^n(x) \equiv P_2{}^n(x) \vee \Psi^n(x))),
\end{aligned}
$$

但し、$P_1 = P_1{}^1, \cdots, P_1{}^n$、$P_2 = P_2{}^1, \cdots, P_2{}^n$、$Z_1 = Z_1{}^1, \cdots, Z_1{}^k$、$Z_2 = Z_2{}^1, \cdots, Z_2{}^k$、$\Psi = \Psi^1, \cdots, \Psi^n$で、$P_i^j$、$\Psi^j$は述語とする$(i=1,2、j=1,\cdots,n)$。

つまり、特にこの嗜好順序を"$\geqq_\Psi{}^{P;Z}$"で表すことにすると、この順序が**Z**に無関係なものであることを考慮にいれて、**Z**を可変とした**P**のΨへの含意限定は、

$$
A \wedge \neg \exists p,z.(\, A(p,z) \wedge p >_\Psi{}^{P;Z} P\,) \qquad \text{(A2.1)}
$$

と書けることになる。この式を $\mathrm{Asc}(A;\, P\sim\Psi;\, Z)$ と表すことにし、"**A**のもとで(**Z**を可変として)**P**をΨに含意限定する"ということにする。

含意限定のモデル論は、与えられた論理式のすべての"P;Zに関する(Zが空のときは単に、Pに関する)Ψ-極大モデル"で成り立つことを真とするというものである。ここでP;Zに関するΨ-極大モデルとは、P、Z以外の述語や関数の解釈がおなじモデルにおいて、先の嗜好的順序"$\geqq_\Psi{}^{P;Z}$"に関し、Pの解釈が極大となるモデルのことである。即ち、形式的に言うと以下のようになる。Mをある構造とし、$|M|$によってMの個体領域(domain)、Kを述語(または関数)定数とするとき、$M[|K|]$によってモデルMでのKの外延を表すことにすると、任意のモデルM_1、M_2において、$M_1 \geqq_\Psi{}^{P;Z} M_2$が成立するのは、以下の関係が成り立つことが必要十分である。

1) $|M_1| = |M_2|$

2) P、Zに現れない任意の述語(または関数)定数Kに対して、$M_1[|K|] = M_2[|K|]$(従って、Ψには**P,Z**のいかなる述語記号もあらわれないので、$M_1[|\Psi|] = M_2[|\Psi|]$が成り立つことに留意せよ)

3) Pのすべての要素P_iに対して、$M_1[|P_i|] = M_2[|P_i|] \cap M_2[|\Psi_i|]$　か、$M_1[|P_i|] = M_2[|P_i|] \cup M_2[|\Psi_i|]$

この時、Mが**P;Z**に関するΨ-極大モデルであるとは、$N >_\Psi{}^{P;Z} M$なるモデルNが存在しないことである(但し、$M_1 \geqq_\Psi{}^{P;Z} M_2$であって$M_2 \geqq_\Psi{}^{P;Z} M_1$でないときに限って$M_1 >_\Psi{}^{P;Z} M_2$と書くことにする)。

fを任意の論理式とする。この時、$\mathrm{Asc}(\,A;\, P\sim\Psi;\, Z) \vdash f$　であることを、

$A \vdash_{\Psi}^{P;Z} f$ で表し、AのP;Zに関するすべてのΨ-極大モデルにおいてfが成り立つことを、$A \models_{\Psi}^{P;Z} f$ で表すことにする。(ただし、'⊢'は演繹体系による推論を表す。)すると次の健全性定理が成り立つ。

[定理1]
$A \vdash_{\Psi}^{P;Z} f$ ならば、$A \models_{\Psi}^{P;Z} f$。 ■

[定理2]
任意の充足可能な論理式Aに対して、P;Zに関するΨ-極大モデルが存在する。
■

定理1、定理2から次の補題を導く。

[補題1]
Aを充足可能な任意の論理式とすると、Asc(A; P~Ψ; Z)は無矛盾。 ■

すなわち、充足可能な論理式Aが与えられたとき、Aにおけるどんな含意限定も矛盾となることがないことが保証されている。
含意限定は高階の論理式で表現されているが、いくつかの高階の限量子を落とすことができる。簡単な述語計算により次の結果を得る。

[命題1]

$$Asc(A; P \sim \Psi; Z) \equiv$$
$$A \wedge \left(\bigwedge_{j=0}^{2^n-1} \left((\exists z.\, A(K_j^1,\cdots,K_j^n,z)) \supset L_j1 \wedge \cdots \wedge L_jn \right) \right) \qquad (A1.2)$$

ここで、jを2進数で表した場合、1)第iけたが0の時 K_j^i は $\lambda x.(Pi(x) \wedge \Psi i(x))$、$L_ji$ は $\forall x.(Pi(x) \supset \Psi i(x))$ を、また、2)第iけたが1の時 K_j^i は $\lambda x.(Pi(x) \vee \Psi i(x))$、$L_ji$ は $\forall x.(\Psi_n(x) \supset P_n(x))$ を表す(i=1,…,n)。

3.2. 例題

含意限定は様々な高次の推論を非単調推論として形式化する上で、一つの足がかりとなることが期待できる。例題を使って含意限定を説明する。

[例題1] 「ある寒い日、となかいさん(Mr. "reindeer")は赤い鼻をしていた」という事実を次のように表す。

Rednosed(reindeer, oneday)

$\wedge$ Cold(oneday) (E1.1)

これをAとしよう。今、となかいさんがいつ赤い鼻をしているかに興味があるとしよう。我々はいくつもの仮説を持つことができる。その一例として「となかいさんが赤い鼻をしている日」と「寒い日(Cold)」になにか関係があるのではないかと仮定してみる。この場合、λx.(Rednosed(reindeer, x)) を Cold に含意限定してみればよい。すなわち、Asc(A; λx.(Rednosed(reindeer, x))~Cold) からの演繹を考える。命題1より、含意限定は次の二文の積と等価である。

$$A(\lambda x.(Rednosed(reindeer, x) \wedge Cold(x))) \supset \forall x.(Rednosed(reindeer, x) \supset Cold(x)), \quad (E1.2)$$

$$A(\lambda x.(Rednosed(reindeer, x) \vee Cold(x))) \supset \forall x.(Cold(x) \supset Rednosed(reindeer, x))。 \quad (E1.3)$$

(E1.2) の前件 A(λx.(Rednosed(reindeer, x) $\wedge$ Cold(x))) はA における λx.(Rednosed(reindeer, x)) の現れをすべて λx.(Rednosed(reindeer, x) $\wedge$ Cold(x)) に置き換えたものである。したがって、

$$A(\lambda x.(Rednosed(reindeer, x) \wedge Cold(x))) \equiv (Rednosed(reindeer, oneday) \wedge Cold(oneday)) \wedge Cold(oneday). \quad (E1.4)$$

これはAそのものであって、Asc(A; λx.(Rednosed(reindeer, x))~Cold)から導けるから、結局、Asc(A; λx.(Rednosed(reindeer, x))~Cold)から(E1.2)の帰結、

$$\forall x.(Rednosed(reindeer, x) \supset Cold(x)) \quad (E1.5)$$

が導けることがわかる。まったく同様に(E1.3)を使って、

$$\forall x.(Cold(x) \supset Rednosed(reindeer, x)) \quad (E1.6)$$

も導けるから、Asc(A; λx.(Rednosed(reindeer, x))~Cold) によって、「となかいさんが赤い鼻をしている日は寒い日であり、寒い日にはとなかいさんは赤い鼻をしている(∀x.(Rednosed(reindeer, x) ≡ Cold(x)))」ことが推論され帰納的な結果を導くことができる。

補題1より含意限定は無矛盾な一階述語論理式から矛盾した結果を導くことはないことが保証されている。たとえば(E1.6)に矛盾する事実「今日は寒い日であるが、となかいさんは赤い鼻をしていない」ことがさらに分かったとしよう。これをA'とする。すなわち、A'は

$$A \wedge \neg Rednosed(reindeer, today) \wedge Cold(today) \quad (E1.7)$$

で表せる。現在の知識はA でなく A' に変わっているので、Asc(A'; λx.(Rednosed(reindeer, x))~Cold)からの演繹を考える。すると、(E1.2)に対応する式から∀x.(Rednosed(reindeer, x) ⊃ Cold(x)) は同様に導くことができるが、(E1.3)に対応する

$$A'(\lambda x.(Rednosed(reindeer, x) \vee Cold(x)))$$

$\supset \forall x.(\mathrm{Cold}(x) \supset \mathrm{Rednosed}(\mathrm{reindeer}, x))$ (E1.8)

の前件部 A'($\lambda x.(\mathrm{Rednosed}(\mathrm{reindeer}, x) \vee \mathrm{Cold}(x))$) は

$(\mathrm{Rednosed}(\mathrm{reindeer}, \mathrm{oneday}) \vee \mathrm{Cold}(\mathrm{oneday}))$

$\wedge \mathrm{Cold}(\mathrm{oneday})$

$\neg(\mathrm{Rednosed}(\mathrm{reindeer}, \mathrm{today}) \vee \mathrm{Cold}(\mathrm{today}))$

$\wedge \mathrm{Cold}(\mathrm{today})$ (E1.9)

となり、$\neg\mathrm{Cold}(\mathrm{today}) \wedge \mathrm{Cold}(\mathrm{today})$が導かれることになって矛盾する。よって、その帰結、$\forall x.(\mathrm{Cold}(x) \supset \mathrm{Rednosed}(\mathrm{reindeer}, x))$は導かれないことになる。つまり、新しい事実に矛盾する結果であった「寒い日にはとなかいさんは赤い鼻をしている」が取り下げられてしまい無矛盾性が保たれる。このことは含意限定による推論が非単調なものとなること、すなわち、知識の増加が定理の減少を招くことがあることを示している。

次にある述語を可変とした例を示す。

[例題2] 「'hector'は怪我をしたり火傷すると痛みを感ずる。'brutus'も火傷すると痛みを感ずる。」は次のように書けるだろう。

$\mathrm{Burnt}(\mathrm{hector}) \supset \mathrm{Painful}(\mathrm{hector})$ (E2.1)

$\wedge \mathrm{Injured}(\mathrm{hector}) \supset \mathrm{Painful}(\mathrm{hector})$ (E2.2)

$\wedge \mathrm{Burnt}(\mathrm{brutus}) \supset \mathrm{Painful}(\mathrm{brutus})$ (E2.3)

さて、『怪我をすると悲しむ($\lambda x.(\mathrm{Injured}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))$)』ことを『火傷すると痛みを感ずる($\lambda x.(\mathrm{Burnt}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))$)』ことに何か関係があるとして、前者を後者に含意限定してみよう。含意限定はある述語記号を述語に含意限定することでおこなわれているので、述語を述語に含意限定する場合には工夫が必要である。しかし、この問題は次のような方法†をとることにより簡単に解決することができる。与えられた論理式Aのもとで、述語αを述語Ψに含意限定したいとする。この時、論理式Aに現れない述語記号P_0を導入し、$A \wedge \forall x.(P_0(x) \equiv \alpha(x))$を扱う。$P_0$は含意限定により解釈が変わるようにしたいから、$P_0$に従って$\alpha$も変化するよう変数化する。すなわち、$\alpha$に現れてかつ$\Psi$に現れない述語すべてを可変とする(含意限定の定義から、Ψには可変とされる述語記号を含んではいけない)。さて、例題に戻ると、(E2.1)~(E2.3)に現れない述語記号P_0を導入し、

$\forall x.P_0(x) \equiv (\mathrm{Injured}(x) \supset \mathrm{Painful}(x))$ (E2.4)

と(E2.1)~(E2.3)との論理積を扱うことになる。この論理式をあらためてAで表す。P_0にはInjuredとPainfulの二つの述語を含むが、PainfulはΨにも現れるた

---

† この方法は基本的に[14]で提案された方法による。

め、Injuredをのみを可変としP_0の$\lambda x.(Burnt(x) \supset Painful(x))$への含意限定を考える。すなわち、$Asc(A; P_0 \sim \lambda x.(Burnt(x) \supset Painful(x)); Injured)$ からの導出を考える。命題1を使うと、

$$
\begin{aligned}
& A(P_0, Injured) \\
& \wedge ((\exists z. A(\lambda x.(P_0(x) \vee (Burnt(x) \supset Painful(x))), z)) \\
& \supset \forall x.((Burnt(x) \supset Painful(x)) \supset P_0(x))) \qquad \text{(E2.5)}
\end{aligned}
$$

が得られることになる。さて、前件部$(\exists z.A(\lambda x.(P_0(x) \vee (Burnt(x) \supset Painful(x))), z))$について調べると、

$$
\begin{aligned}
& \exists z.A(\lambda x.(P_0(x) \vee (Burnt(x) \supset Painful(x))), z) \\
& \equiv \exists z.(\\
& Burnt(hector) \supset Painful(hector) \\
& \wedge z(hector) \supset Painful(hector) \\
& \wedge Burnt(brutus) \supset Painful(brutus) \\
& \wedge \forall x.(P_0(x) \vee (Burnt(x) \supset Painful(x))) \equiv (z(x) \supset Painful(x)) \\
&). \qquad \text{(E2.6)}
\end{aligned}
$$

ここで、z に$\lambda x.(Burnt(x) \wedge Injured(x))$を代入すると、この前件部はAから求められる。よって、確かに $A(\lambda x.(P_0(x) \vee (Burnt(x) \supset Painful(x))), z)$ を満足する述語 z が存在することが証明される†。すなわち、含意限定により(E2.5)結論部$\forall x.((Burnt(x) \supset Painful(x)) \supset P_0(x))$が得られることになる。これは(E2.4)より、

$$\forall x.((Burnt(x) \supset Painful(x)) \supset (Injured(x) \supset Painful(x))), \qquad \text{(E2.7)}$$

つまり「火傷すると痛みを感ずるものは、怪我をしても痛みを感ずる」ことを表している。このことから「火傷すると痛みを感ずる'brutus'は、やはり怪我をしても痛みを感ずる」といった類推の結果を得ることになる。すなわち、

$$Injured(brutus) \supset Painful(brutus) \qquad \text{(E2.8)}$$

が導かれる。

含意限定による類推は次のように行える。例えば二者が『似ている』とは両者がある共通の性質(Ψ)を有することを意味する。そこで一方の持つある性質(P)をその共通する性質に含意限定すると、矛盾しない限り他方もその性質(P)を持つと推論することができる。この様な定式化は類推の帰納的側面を明確にしたものとなる。上の例題において、「怪我をすると痛みを感ずる」性質を共通する

† 一般に高階論理式の自動証明は困難であるが、やはり高階論理式で表される極小限定の研究で、与えられた論理式がある形で書ける場合には極小限定と等価な一階述語論理式が機械的に得られることが示された[8,10]。本稿ではそれについて触れないが、まったく同様の手法で帰一推定と等価な一階述語論理式を得ることができるクラスを考えることができる。実際、例題2はそのクラスに属し、この場合、z を$\lambda x.(Burnt(x) \wedge Injured(x))$とすればよいことが機械的に決められる。

「火傷すると痛みを感ずる」性質に含意限定することによって(E2.7)式「"火傷すると痛みを感ずる"ものは"怪我をしても痛みを感ずる"」を帰納することができた。(E2.8)式「Brutusも怪我をすると痛みを感ずる」はその帰納の結果から(演繹によって)得られたものである。

4. 考察 - 極小限定との比較と含意限定の応用

常識による推論の非単調な側面を形式的にとらえるためにMcCarthyは極小限定(circumscription)を提案した。極小限定は「ある性質を満たすものは、述べられているもの以外存在しない」との考えを定式化したものになっている。これは、与えられた論理式を満足する範囲で、その性質を外延的に極小化することによって実現している。(A1.1)において、嗜好順序を、

$\mathbf{P_1,Z_1 \geqq P_2,Z_2}$

iff $\forall \mathbf{x}.(P_1{}^1(\mathbf{x}) \supset P_2{}^1(\mathbf{x})) \wedge \cdots \wedge \forall \mathbf{x}.(P_1{}^n(\mathbf{x}) \supset P_2{}^n(\mathbf{x})))$、

但し、$\mathbf{P_1}=P_1{}^1, \cdots ,P_1{}^n$、$\mathbf{P_2}=P_2{}^1, \cdots ,P_2{}^n$で、$P_i{}^j$は述語とする$(i=1,2$、$j=1,\cdots,n)$、

としたものが(並列)極小限定((parallel) circumscription)である。すなわち、ある述語の組$\mathbf{P_1,Z_1}$及び$\mathbf{P_2,Z_2}$が、第n+1番以降の述語(Z1、Z2に相当)には無関係に、第1番から第n番までのすべての述語(P1、P2に相当)において、前者の外延が後者の外延に含まれるとき、すなわち、外延がより小さいとき、前者の述語の組のほうが後者の組より好ましい、$\mathbf{P_1,Z_1}$が$\mathbf{P_2,Z_2}$より好ましいとするのが極小限定である。

含意限定と極小限定の相違は、モデル論を考えるとわかりやすい。直観的な言い方をすると、含意限定のモデル論は離散的な順序構造に基づくものであるのに対し、極小限定のモデル論は連続的な順序構造に基づくものであるといえるだろう。それぞれの順序構造について調べてみよう。ある二つのモデル、M1、M2において、$M_1>M_2$なる関係が成立したとする。順序列としてみた時、M_1、M_2の間にモデルはいくつ存在しえるであろうか? 簡単のため、含意限定の対象となる述語列(そして、極小化の対象となる述語列)がただ一つの述語Pからなる場合を考える。含意限定の場合、$M_1>N$、かつ、$N>M_2$なるモデルは高々一つしかない†。それに対し、極小限定の場合、$M_1>M_2$であることは、M_1におけるPの外延がM_2におけるPの外延を真に包含することしか意味しないので、M_1、M_2の間にモデルは一般に無限に存在する。その差違は、知識の増加を契機にして

† 詳しい説明は定理2の証明中に現れているので、ここでは結果のみを記す。

起こる定理の修正(信念の翻意(belief revision)と呼ばれる)がなされる時、特徴的に現れる。Asc(A; P~Ψ; Z)は、Zを可変にしてPの解釈をΨの解釈に近づけるとも解釈できるので、これに相当するCircum($A \wedge \forall x.(P_0(x) \equiv \neg(P(x) \equiv \Psi(x)))$; $P_0; P,Z$)との比較によって説明する。今、Aからの演繹だけでは得られない結論、$\forall x.(P(x) \equiv \Psi(x))$、「すべてのxに対し、$(P(x) \equiv \Psi(x))$が成り立つ」が両者それぞれの嗜好順序において極大となるAのモデルで成り立っていたとする。今、Aに新しい知識$P(a) \wedge \neg\Psi(a)$が加わったとしよう。この公理をA'とする。この結果、両者のA'の極大モデルは、Aのそれに比べ、新しい知識を満足する範囲まで嗜好順序において後退したものとなる。すなわち、極小限定におけるA'の極大モデルでは、$\forall x.(\neg(x=a) \supset (P(x) \equiv \Psi(x)))$が成り立ち、「a以外のすべてのxに対し、$(P(x) \equiv \Psi(x))$が成り立つ」を主張することになる。これは言わば、極小限定における信念の翻意は、新しく判明した事実のみを例外として、それ以外の所ではあいかわらず元の信念を正しいとする一種"頑迷な"信念の翻意を表すことになる。これに対し、含意限定におけるA'の極大モデルでは、P、Ψの同値関係のうち、$\forall x.(P(x) \supset \Psi(x))$なる信念をとりさげ、$\forall x.(\Psi(x) \supset P(x))$のみを、すなわち、「Ψを満足するものはPを満足する」という主張のみをすることになる。これは、"頑迷な"信念の翻意に比べると、"拘泥のない"信念の翻意を表すことになる。(このことはPをλx.Rednosed(reindeer, x)、ΨをCold、aをtodayとすると例題1にてらして見ることができる。)

含意限定と極小限定との証明論的な関係をについて述べる。命題1から次の命題が容易に導ける。

[命題2]　Asc(A; P~Ψ; Z)から以下の式が導ける。

$$\forall z.(A(\Psi,z) \wedge \forall x.(\Psi(x) \supset P(x)) \supset \forall x.(P(x) \equiv \Psi(x))) \qquad (A2.3)$$

ここでP、Ψをn個組の述語とすると、
$\forall x.(\Psi(x) \supset P(x))$ は $(\Psi_1(x) \supset P_1(x)) \wedge \cdots \wedge \forall x.(\Psi_n(x) \supset P_n(x))$ を表し、
$\forall x.(P(x) \equiv \Psi(x))$ は $\forall x.(\Psi 1(x) \equiv P1(x)) \wedge \cdots \wedge \forall x.(\Psi n(x) \equiv Pn(x)))$ を表す。■

ところが、極小限定は

$$\forall p,z.(A(p,z) \wedge \forall x.(p(x) \supset P(x)) \supset \forall x.(P(x) \equiv p(x))) \qquad (A2.4)$$

と表せるので、極小限定中の述語変数pをP、Zを含まないある一階の述語Ψで置き換えた論理式は、Zを可変としたPのΨへの含意限定の定理となる。極小限定はある場合に述語変数p,zを具体化したある一階述語論理式と等価になることが知られている[10]ので、この命題はある場合に極小限定そのものが含意限定の定理となることを意味する。しかし、逆にモデル論の相違にもかかわらず、含意限定

が極小限定で表現できる可能性は否定できないことも指摘しておかねばならない[7]。それは等価な表現ではないけれども論理式極小限定(formula circumscription)[12]も極小限定で表現できるという意味でありえることである。しかし、表現の方法は何であれ、離散的な嗜好順序に基づく形式化が高次の推論を扱うのに適していることこそ本研究で指摘したい点である。

さて、連続的な順序にもとづく“頑迷な信念の翻意”の仕方と離散的な順序にもとづく“拘泥のない信念の翻意”の仕方が、極小限定と含意限定のおもな相違であることを述べた。二つの翻意の仕方は優劣がつくものではなく、ともに人間の行う信念の翻意の一面を表しているように思える。持っている信念が十分な経験に裏付けられている場合、その翻意の仕方は“頑迷な信念の翻意”を示すのが適当であろう。一方、我々が未熟な経験を通して仮定する仮説に類するような信念の場合は、誤りが判明したときには、“拘泥のない信念の翻意”をするのが適当であろう。両者の切替えをいつにするか?あるいはもっと段階的に変わる信念の翻意の仕方を考えるべきか?等の問題は残された興味深い研究課題のうちの一つであるが、現在のところおおむね次のように言うことができるであろう。常識として与えられた知識(信念)を知的システムが管理する場合には、“頑迷な信念の翻意”は適切なものであり、これに対し“拘泥のない信念の翻意”は、知的システム自らが帰納、類推、発送等の非演繹的な推論によって生み出す仮説(信念)に対して適用されるべきである。

最後に、含意限定の応用について考える。非演繹的な高次の推論では無矛盾性の維持(無矛盾な知識から無矛盾な結論を導く)が大きな問題の一つとなる。無矛盾であるかどうかを調べることが一般に計算可能ですらないからである。しかし、含意限定は与えられた論理式の無矛盾性を維持するよい性質があるため(補題1)、この問題を避けることができる。

最後に、含意限定の応用について考える。非演えき的な高次の推論では無矛盾性の維持(無矛盾な知識から無矛盾な結論を導く)が大きな問題の一つとなる。無矛盾であるかどうかを調べることが一般に計算可能でないからである。しかし、含意限定は与えられた論理式の無矛盾性を維持するよい性質があるため(定理1)、この問題を避けることができる。

含意限定の利用で決定的に問題となるものはPに対するΨの選択であろう。Pと関係すると思われるΨさえ与えれば、後は含意限定の理論の範囲内となる。Ψを与えることはし好順序を決定づけ、含意限定による推論が好ましいものであるかどうかを決定づけることになるため、応用上では有益なΨを見つけることが特に重要である。一つの方法は、Pに対するΨの候補として、Pの候補集合と呼ぶ述語

の集合を与え、そこから適当なΨを見つけ出す方法である。以下に、その手法にのっとった例題を考える。

[例題3] 以下の知識データベースΔについて考えよう。Δは次の“*is-a* 階層”Hと各クラスに関する知識Oからなるとしよう($\Delta \equiv H \wedge O$)。

$$
\begin{aligned}
H \equiv\ & \forall x.(\,\mathrm{Japanese}(x) \supset \mathrm{Human}(x)\,) \\
& \wedge \forall x.(\,\mathrm{American}(x) \supset \mathrm{Human}(x)\,) \\
& \wedge \forall x.(\,\mathrm{Human}(x) \supset \mathrm{Animate}(x)\,) \\
& \wedge \forall x.(\,\mathrm{Dog}(x) \supset \mathrm{Animate}(x)\,) \\
& \wedge \forall x.\neg(\,\mathrm{Japanese}(x) \wedge \mathrm{American}(x)\,) \\
& \wedge \forall x.\neg(\,\mathrm{Human}(x) \wedge \mathrm{Dog}(x)\,) \\
& \wedge \mathrm{Japanese}(koichi) \\
& \wedge \mathrm{American}(john) \\
& \wedge \mathrm{Dog}(taro)
\end{aligned}
\tag{E3.1}
$$

$$O \equiv \mathrm{Laughs}(koichi) \tag{E3.2}$$

この*is-a*階層をもとにあるクラスで得た知識をほかのクラスでも使えるよう、できるだけ一般化するように含意限定を使うことにしたい。したがって、この場合、一般化したい述語はLaughsであり、Laughsの候補集合はHにあらわれる各クラスをあらわす述語(Animate, Dog, Human,…)で構成される。そして、一般化したい性質(Laughs)を階層の高いクラスから(Animateから)順に優先的に含意限定すればよい。すなわち次の公理からの演繹を考えればよい。

$$
\begin{aligned}
& A_0 \equiv \Delta \\
\wedge\ & A_1 \equiv \mathrm{Asc}(\,A_0; \mathrm{Laughs}\sim\mathrm{Animate}) \\
\wedge\ & A_2 \equiv \mathrm{Asc}(\,A_1; \mathrm{Laughs}\sim\mathrm{Dog}) \\
\wedge\ & A_3 \equiv \mathrm{Asc}(\,A_2; \mathrm{Laughs}\sim\mathrm{Human}) \\
\wedge\ & A_4 \equiv \mathrm{Asc}(\,A_3; \mathrm{Laughs}\sim\mathrm{American}) \\
\wedge\ & \mathrm{Asc}(\,A_4; \mathrm{Laughs}\sim\mathrm{Japanese})
\end{aligned}
\tag{E3.3}
$$

A_1は次のように単純化される。

$$A_1 \equiv \Delta \wedge \forall x.(\mathrm{Laughs}(x) \equiv \mathrm{Animate}(x)) \tag{E3.4}$$

同様に以下の式が成り立つ。

$$A_2 \equiv A_1 \wedge \forall x.(\mathrm{Dog}(x) \supset \mathrm{Laughs}(x)), \tag{E3.5}$$

$$A_3 \equiv A_2 \wedge \forall x.(\mathrm{Human}(x) \supset \mathrm{Laughs}(x)), \tag{E3.6}$$

$$A_4 \equiv A_3 \wedge \forall x.(\mathrm{American}(x) \supset \mathrm{Laughs}(x)), \tag{E3.7}$$

$$\mathrm{Asc}(\,A_4; \mathrm{Laughs}\sim\mathrm{Japanese}) \equiv A_1 \wedge \forall x.(\mathrm{Japanese}(x) \supset \mathrm{Laughs}(x)). \tag{E3.8}$$

結局、含意限定によって「動物であれば笑うし、笑えば動物である」という結果を得ることになる。すなわち

$$\forall x.(\mathrm{Laughs}(x) \equiv \mathrm{Animate}(x)) \tag{E3.9}$$

を得る。ここで、新しい事実として犬のtaroは笑わないことが判明したとしよう。

$$O' \equiv O \wedge \neg Laugh(taro) \qquad (E3.10)$$

とする。これに従いΔもΔ'に変更する ($\Delta' \equiv H \wedge O'$)。すると、

$$A_1 \equiv \Delta' \wedge \forall x.(Laughs(x) \supset Animate(x)), \qquad (E3.11)$$

$$A_2 \equiv A_1,$$

$$A_3 \equiv A_2 \wedge \forall x.(Human(x) \equiv Laughs(x)), \qquad (E3.12)$$

$$A_4 \equiv A_3 \wedge \forall x.(American(x) \supset Laughs(x)), \qquad (E3.13)$$

$$Asc(A_4; Laughs \sim Japanese) \equiv A_1 \wedge \forall x.(Japanese(x) \supset Laughs(x)). \qquad (E3.14)$$

すなわち、先の結果(E3.9)は取り下げられ、階層上でもっとも一般化した無矛盾な知識「人間であれば笑うし、笑えば人間である」、

$$\forall x.(Human(x) \equiv Laughs(x)) \qquad (E3.15)$$

を得ることのになる。

5. むすび

以上、非単調推論の一種である含意限定を提案し、類推や帰納などの高次の推論が非単調推論として形式化できる可能性を示した。含意限定はいわば"拘泥のない"信念の翻意を行う性質があるが、これは知的システム自らが帰納、類推等の高次の推論によって導く仮説の管理の際に好ましいものであると考えられる。応用の際に問題となる、含意限定の対象となる述語(特にΨ)の決め方に関しては未だ研究の余地を多く残している。高次の推論の研究を見通しよく建設的に進め、そのための健全な議論を支えるためには形式化が不可欠である。含意限定の考え方、手法が、高次の推論を形式化するうえで少しでも参考になることを期待する。

[謝辞]

本研究を進めるに当たり、有益な御示唆を頂いたICOT研究所の方々、特に佐藤健氏、長谷川隆三室長、古川康一研究次長に、また、本研究の機会を与えてくださった淵一博所長に感謝致します。さらに、建設的な批判を頂いたATTベル研究所のD. Etherington氏、スタンフォード大B. N. Grosof氏に感謝いたします。

[参考文献]

[1]:有川節夫、篠原武、宮原哲浩:帰納推論の理論、大須賀節夫、佐伯　編「知識の獲得と学習」、オーム社、p147-194 (1987).

[2]:有川節夫、原口誠:類推の理論、大須賀節夫、佐伯編「知識の獲得と学習」、オーム社、p221-250 (1987).

[3]:有馬淳、佐藤健:非単調推論、淵一博監修、古川康一、溝口文雄共編「知識プログラミング」、知識情報処理シリーズ8、p189-214 (1988).

[4]:Arima, J. : A Form of Conjectural Reasoning on Equivalence --- Ascription、日本ソフトウエア科学会第3回大会論文集、p41-44 (1986).

[5]:国藤進：演えき·帰納·発想の推論機構化をめざして、淵一博監修、古川康一、溝口文雄共編「知識プログラミング」、知識情報処理シリーズ2、p1-22 (1986).

[6]:佐藤健：(個人的議論)、6月 (1988).

[7]:佐藤健：(個人的議論)、9月 (1988).

[8]: 中川裕志、森辰則：論理型言語におけるCircumscription、情報処理学会論文誌、Vol. 28、No.4、p330-338 (1987).

[9]: Bossu,G. and Siegel,P.: *Saturation, nonmonotonic reasoning, and the closed-world assumption, Artificial Intelligence* 25, p13-65 (1985).

[10]: Lifschitz,V.: *Computing circumscription, Proc. of the Ninth IJCAI*, Los Angeles, p121-127 (1985).

[11]: McCarthy,J.: *Circumscription - a form of non-monotonic reasoning, Artificial Intelligence* 13, p27-39 (1980).

[12]: McCarthy,J.: *Application of circumscription to formalizing common-sense knowledge, Artificial Intelligence* 28, p89-116 (1986).

[13]: McDermott,D. and Doyle,J.: *Non-monotonic Logic I, Artificial Intelligence* 13, p41-72 (1980).

[14]: Perlis,D. and Minker,J.: *Completeness Results for Circumscription, Artificial Intelligence* 28, p29 - 42 (1986).

[15]: Reiter, R. : *A logic for default reasoning, Artificial Intelligence* 13, p81-132 (1980).

[16]: Shoham,Y.: *Nonmonotonic Logics: Meaning and Utility, Proc. of the Tenth IJCAI*, Milan, p388-393 (1987).

APPENDIX

Theorem1.

$A \vdash_{\psi}^{P;Z} f$ 　ならば、$A \models_{\psi}^{P;Z} f$。 ■

Proof.

Aのすべての$P;Z$に関する極大Ψモデルにおいて、Asc(A; P∼Ψ; Z)、すなわち特に、$\neg\exists p,z.\ A(p,z) \wedge p >_{\psi}^{P;Z} P$ 　が成り立つことをまず示す。さて、ある$P;Z$に関する極大ΨモデルMにおいて、$\neg\exists p,z.\ A(p,z) \wedge p >_{\psi}^{P;Z} P$ 　が成り立たないとしよう。すなわち、ある述語または関数の組p_1,z_1があって、$M \models A(p_1,z_1) \wedge p_1 >_{\psi}^{P;Z} P$ 　ということになる。ここで、$P;Z$以外の割り当てはMと同じで、$P;Z$に関してはMにおけるp_1,z_1と同じ割り当てをするモデルNを構成することができる。すると定義からあきらかに、$N >_{\psi}^{P;Z} M$なるモデルNが存在することになり、Mが$P;Z$に関する極大Ψモデルであることに矛盾する。よって、背理法により、Aのすべての$P;Z$に関する極大Ψモデルにおいて、Asc(A; P∼Ψ; Z) 　が成り立つことが示せた。

さて、$A \vdash_{\psi}^{P;Z} f$ 　および、定義より、Asc(A; P∼Ψ; Z) ⊨ f。Aの任意の$P;Z$に関する極大ΨモデルをMとすると、上の結果から、M ⊨ Asc(A; P∼Ψ; Z)。したがって、M ⊨ f。よって$A \models_{\psi}^{P;Z} f$。

Theorem2.

Pを互いに独立な述語記号からなる有限列、ZをPに現れない互いに独立な述語記号または関数記号からなる有限列、ΨをP,Zのいかなる述語記号も関数記号も現れないPと同数個の述語からなる列とすると、このような任意のP,Z,Ψに対して、

任意の充足可能な論理式Aの$P;Z$に関する極大Ψモデルが存在する。■

Proof.

'$<_{\psi}^{P;Z}$'に関して無限上昇系列が存在しないことを証明すればよい。Pをn個の要素からなる述語記号列、M_i (i = 0,1,⋯) をAのモデルとすると、$M_j <_{\psi}^{P;Z} M_{j+1}$ (j = 0,1,⋯, 2n) を満足する上昇系列$M_0, M_1, \cdots, M_{2n+1}$は存在しない。というのは、'$<_{\psi}^{P;Z}$'の定義から、$M_j <_{\psi}^{P;Z} M_{j+1}$ なる各jに対して少なくともある1つの述語Piがあって、

$M_{j+1}[\![P_i]\!] = M_j[\![P_i]\!] \cap M_j[\![\Psi_i]\!]$ 　か、$M_{j+1}[\![P_i]\!] = M_j[\![P_i]\!] \cup M_j[\![\Psi_i]\!]$ 　[T1.1]

であり、かつ、

$M_j[\![P_i]\!] \neq M_{j+1}[\![P_i]\!] \cap M_{j+1}[\![\Psi_i]\!]$ 　かつ、$M_j[\![P_i]\!] \neq M_{j+1}[\![P_i]\!] \cup M_{j+1}[\![\Psi_i]\!]$ [T1.2]

を満たす。さてこの時、M_j, M_{j+1}を「Piにおける上昇列」と言うことにすると、P_iにおける上昇列が、ある上昇系列において現れるのは、高々2度までである。

ある上昇系列において、M_j, M_{j+1}、及び、M_k, M_{k+1}(k は $j < k$ を満たす最小の自然数)がPiにおける上昇列であったとすると、

Ψ_iにはP,Zのいかなる述語記号も関数記号もあらわれないことから

$$M_j[|\Psi_i|] = M_{j+1}[|\Psi_i|] = M_k[|\Psi_i|] = M_{k+1}[|\Psi_i|]。 \quad [T1.3]$$

さて[T1.1]から、一般性を失わず

$$M_{j+1}[|P_i|] = M_j[|P_i|] \cap M_j[|\Psi_i|] \quad [T1.4]$$

が成り立つとしよう。また、M_j, M_{j+1}、及び、M_k, M_{k+1} は、同じ上昇系列で現れ、かつ、k は $j < k$ を満たす最小の自然数であるから、j+1番目からk番目までのモデルにおいて、P_iの解釈は変わらない。すなわち、

$$M_{j+1}[|P_i|] = M_k[|P_i|]。 \quad [T1.5]$$

したがって、[T1.4]、[T1.5]、及び、[T1.3]から、

$$\begin{aligned} M_k[|P_i|] &= M_j[|P_i|] \cap M_j[|\Psi_i|] \\ &= M_j[|P_i|] \cap M_k[|\Psi_i|] \end{aligned} \quad [T1.6]$$

ここで、仮に j を k に代えた[T1.1]より、

$$M_{k+1}[|P_i|] = M_k[|P_i|] \cap M_k[|\Psi_i|] \quad [T1.7]$$

とすると、[T1.7]、[T1.6]及び、[T1.3]から、

$$\begin{aligned} M_{k+1}[|P_i|] &= (M_j[|P_i|] \cap M_k[|\Psi_i|]) \cap M_k[|\Psi_i|] \\ &= M_j[|P_i|] \cap M_k[|\Psi_i|] \\ &= M_k[|P_i|] \quad [T1.8] \end{aligned}$$

となり、Piにおける上昇列であることに矛盾する。よって、

$$M_{k+1}[|P_i|] = M_k[|P_i|] \cup M_k[|\Psi_i|]。 \quad [T1.9]$$

すると、[T1.9]、[T1.6]から

$$\begin{aligned} M_{k+1}[|P_i|] &= (M_j[|P_i|] \cap M_k[|\Psi_i|]) \cup M_k[|\Psi_i|] \\ &= M_k[|\Psi_i|]。 \end{aligned} \quad [T1.10]$$

よって、k+1番目以降P_iにおいて上昇するどんなモデルも存在しないことは、定義から明らかである。

以上のことから、P_iにおける上昇列が、ある上昇系列において現れるのは、高々2度までであることがわかった。一方、Pの中に述語記号はn個しかないから、(最初のモデルを含めて)上昇系列は高々2n+1の長さしかないことになる。すなわち、無限上昇系列が存在しない。

■