ICOT Technical Memorandum: TM-0596

TM-0596

非単調推論

有馬淳、佐藤健

September, 1988

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03) 456-3191~5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

非単調推論

有馬 淳　　佐藤 健

1. はじめに

未だ解明されないいくつかの人間の知的活動は不完全な情報の取り扱いと密接な関係がある。曖昧な情報や常識に基づく推論、因果関係の推定、予測などにおいて、従来の論理では表し難いいくつかの推論が存在する。それらの推論に共通していえる点は、すべて、不完全な知識を有効に扱っているという事実である。例えば予測において、不完全な情報から推論することは本質的であり、最も特徴的である。明日のことがすべて判明することがないように、現時点で知ることができない重要な情報が常に存在する可能性がある。予測に限らず、ある事を推論するのに必要なすべての情報が手に入ることは現実上むしろまれなことであろう。

不完全な知識からの推論を研究する最大の動機は、従来の論理があまりに情報の欠如に対して弱い点に基づいている。従来の論理では、“いかなる場合でも正しい結論”を導くことが重要な目的であったため、ある結論に反する可能性が“わずかでも”存在する場合はその結論を導くことはない。しかし現実問題として完全な情報を得ることが困難である以上、正確な世界の知識を持てば持つほど、“いかなる場合でも正しい結論”を導く推論ではほとんどなにも言えなくなるだろう。ある鳥が飛ぶことを導くことさえ困難である。飛ぶことを導くのにほとんど尽きることない情報が必要だからである。その鳥はヒナではないだろうか?羽を痛めていないだろうか?ペンギンではないだろうか?なにかに捕まっていないだろうか?・・・。そこで、“いかなる場合でも正しい結論”ではなく、“一般的に正しい結論”を導く推論を求めることは全く妥当な発想であろう。即ち、“知識不足でおてあげ”といった態度でなく、現在判りうる範囲での最良の推測を行うことを期待するのである。しかし、もともと必要な情報なしに推論を進めるのであるから、そういった推論には誤る可能性が本質的に内在することになる。新事実によって既に得た結果がくつがえされた場合は、(科学的な態度がそうであるように)その結果を捨て、新しいより精密な結果に替えねばならない。このような

性質、つまり知識の増加が必ずしも定理の増加につながらない性質を我々は“非単調性”と呼んでいる。即ち、この非単調性を有する推論こそが情報が不足した環境下における推論の特徴であり、それが非単調推論なのである。

“非単調”の定義は、D. McDermottらの定義[14]に従うと次の様に書ける。

［定義］ 非単調(nonmonotonic reasoning)

A、Bを公理の集合、Th(S)を公理の集合Sからある推論によって導かれるすべての定理の集合とする。

$B \supseteq A$† でかつ $Th(B) \not\supseteq Th(A)$ なるA、Bが存在する時、この推論は非単調であると言う。 ［終わり］

今、「P介は鳥である」という事実を知ったとしよう。この事実から我々は直観的に「P介は飛ぶ」と推測することができる。しかし、もしここで「P介はペンギンである」という事実が判明したとすると、我々はもはや先の結論には到達しない。このように人間の推論では、事実の増加が結論の減少を招くことがめずらしくない。このことを非単調推論の定義に照らしてみてみよう。

人間の持つ知識(公理の集合で表わせるとする)をΓとして、

A ＝ Γ ∪ {「P介は鳥である」}

B ＝ Γ ∪ {「P介は鳥である」,「P介はペンギンである」}

とすると明らかに、$B \supset A$。しかし、

{「P介は飛ぶ」} ∈ Th(A)

{「P介は飛ぶ」} ∉ Th(B)

よって $Th(B) \not\supseteq Th(A)$ であり、この推論は非単調である。

非単調な推論の形式化は、コンピュータ上で非単調推論を実現するための第一歩である。この試みは1970年代後半より人工知能の分野で、特に常識をコンピュータに持たせることを意図して始まっている。そのうちの主要な2つのアプローチ、“デフォルト論理(default logic)”と“極小限定(circumscription)”をそれぞ

---

† 本章において、2項関係“⊇”、“⊉”は、それぞれ通常の意味の集合の包含関係を表し、“⊃”は論理的な含意記号(implication)を表すことにする。

れ2節、3節で紹介し、4節では、特に極小限定の手法を使って、非単調推論の応用を帰納や類推にひろげる提案を行う。

2. 非単調論理

非単調論理は古典論理を拡張することによって、非単調推論を行う。この流れには、McDermottとDoyleのNML-I[14]、McDermottのNML-II[15]、MooreのAutoepistemic Logic[17]やReiterのデフォルト論理(Default Logic)[19]がある。

これらの論理の基本的な考え方は、「pの否定がわからないときには、pは成り立つものとする」ということである。我々はこうした推論を実生活でよく行っている。たとえば、「一般に鳥は飛ぶことができる」ことがわかっていて「Tweetyは鳥である」という情報が与えられると、「Tweetyが飛ばない」かどうかわからないけれども、「飛ばない」ということがわからない以上「Tweetyは飛ぶことができる」と結論するのが適当であろう。また、このときに、「Tweetyが飛ばない」ということがわかれば、もはや「Tweetyは飛ぶことができる」と結論することはできなくなり、結論が非単調的に変わるのである。非単調論理では、こうした考えにのっとって「わからない」ということを「証明できない」ということに置き換えて推論を行う。

以下では、Reiterのデフォルト論理を中心に解説する。デフォルト論理では、推論規則に「証明できない」という概念を導入している。上の例における「一般に鳥は飛ぶことができる」ということは次に示すDefault(デフォルト推論規則)によって表される。

$$\frac{\mathrm{Bird}(x):\mathrm{MFly}(x)}{\mathrm{Fly}(x)} \tag{1.1}$$

この推論規則の意味は、直感的にいえば、Bird(x)を導くことができて(つまり、xが鳥であることがわかっていて)、¬Fly(x)を導くことができなければ、(xが飛ばないことがわからないならば)、Fly(x)を導くことができる(xが飛ぶと結論してよい)ことを示している。ここで、Default中のMFly(x)が「¬Fly(x)を証明できない」ということを表している。

このときにBird(Tweety)だけがわかっている情報として存在していたならば、Bird(Tweety)だけからは¬Fly(Tweety)を導くことができないので、上記のDefaultにより、Fly(Tweety)を導くことができる。

こういった形式の表現は実世界ではよく存在している。たとえば、列車の時刻表の中に11時発の列車が記載されていたとしよう。たとえ何らかの事故があって列車が遅れて11時に発車しない可能性があったとしても、とりあえず我々は、遅れる可能性を無視して列車は11時に発車すると考えるであろう。この場合「時刻表に記載のある列車は通常時刻表どうり発車する」ことを表すには、次に示すDefaultを用いればよい。

$$\frac{\text{Timetable(train,depature-time):MDepart(train,departure-time)}}{\text{Depart(train,departure-time)}} \qquad (1.2)$$

上のように表しておけば時刻表に記載があって、列車が遅れるという情報がなければ時刻表どうりに列車が発車することを導くことができるし、もし駅で列車が遅れて時刻どうりに発車できないことがわかれば、すなわち、¬Depart(train,departure-time)がわかったとすれば、もはや上のDefaultによる推論はできないようになる。

以上の二つの例でもわかるように、こうしたDefaultを用いた推論というのは、「一般的に….」とか「常識的に….」とかいった表現を扱った推論ということができるであろう。これに対して、古典論理では必ず正しいことを扱うものであったので、こういったあいまいさを含む概念を扱うことができなかったのである。

さて、デフォルト論理をもう少し詳細に調べてみよう。Defaultの厳密な定義は以下のとおりである。

[定義]　Default 、Default の 前 提 部(Prerequisite) 、Default の 結 論 部 (Consequent)

xを自由変数の組、$\alpha(x),\beta_1(x),\ldots,\beta_m(x),w(x)$は、**x**を自由変数として持つ一階述語論理式とする。<u>Default</u>とは、

$$\frac{\alpha(x):M\beta_1(x),\ldots,M\beta_m(x)}{w(x)} \qquad (1.3)$$

の形の推論規則のことである。また、$\alpha(x)$の部分を<u>Defaultの前提部</u>と言い、$w(x)$の部分を<u>Defaultの結論部</u>と言う。　[終わり]

たとえば、さきほどの鳥の例のDefaultでは、各論理式が自由変数**x**を持っており、Bird(x)がこのDefaultの前提部、下の方のFly(x)が結論部となる。

[定義]　閉Default(Closed Default)
上のdefaultの定義において$\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m,w$が自由変数を含まなければ、そのDefaultは閉Defaultと言う。　[終わり]

閉Defaultの例は次のような形のものである。

$$\frac{\forall x(P(x)\lor Q(x)):M\forall x\exists y(Q(y)\land R(x,y))}{\forall x\exists y(R(x,y))} \tag{1.4}$$

以下では、議論を簡単にするために、主に閉Defaultに基づいて述べる。

[定義]　Default Theory、閉Default Theory(Closed Default Theory)
Defaultの集合Dと公理の集合Wの対を$\Delta=(D,W)$と書いてDefault Theoryと言う。また、すべてのDefaultが閉DefaultであるDefault Theoryを閉Default Theoryと言う。　[終わり]

さて、この論理における閉Default Theory$\Delta=(D,W)$に対する推論結果の集合E(ReiterはExtension†と呼んでいる)は、以下の条件を満たすことが望ましいであろう。

(1) Eは公理の集合Wを含む、すなわち、わかっていることは推論結果に含まれている。

(2) Eは演えき的に閉じている。すなわち、Eから一階述語論理の推論規則によって導かれる結果はEに含まれる。

(3) $\alpha:M\beta 1,\ldots,M\beta m/w$ がDefaultのときに、$\alpha\in E$ かつ$\neg\beta 1,\ldots,\neg\beta m\notin E$ならば$w\in E$である。すなわち、$\alpha$がわかっていて$\neg\beta 1,\ldots,\neg\beta m$がわからないならば、Defaultにより、wであると考える。

以上のことを考慮して、閉Default TheoryのExtensionを以下のように定義する。

[定義]　Extension††
Eをある一階述語論理式の集合としたとき、Eが閉Default Theory(D,W)の

---

† 2節のExtensionは、ある述語を満足する個体の集まりという通常の「外延」という意味とは異なり、デフォルト論理で導かれる定理の集まりという意味をもつ。

Extensionであるとは、次の式を満足するときである。

$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ (1.5)

ここで各E_iは以下の式で定義される。

$E_0 = W$

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup CGD(D, E_i, E) \quad (i \geq 0)$

ここで$Th(E_i)$はE_iから一階述語論理の推論規則を用いて得られる定理の集合であり、また、$CGD(D,E_i,E)$はE_iが求められた時点でDefaultから導けるものの集合であり、

$CGD(D,E_i,E) = \{w | \alpha : M\beta_1,..,M\beta_m/w \in D$ ただし、$\alpha \in E_i$ かつ $\neg\beta_1,..,\neg\beta_m \notin E\}$

と定義する。 [終わり]

上の帰納的定義では、分かっていること(公理の集合W)から始めてDefaultを用いて導けるものを順々に求めている。これは逆にみれば導かれた結果には必ずその根拠となる公理やDefaultが存在していることを表している。

しかし、上の式においてEが式の右辺でも使われていることに注意する必要がある。つまりこの定義は、Eが与えられればExtensionであるかどうかを判定はできるが、この定義から直接Extensionを具体的に求めることはできない。さらに、ある論理式がExtensionに含まれるかどうかを判定することは計算不可能であることが知られている。

上の定義によってさきほどの鳥の例がうまくいくかどうか詳しく調べてみよう。鳥の例では、Defaultの集合としては、$D = \{Bird(x):MFly(x)/Fly(x)\}$となる。これは、閉Defaultではないが以下のような閉Defaultが無限にあるものと考え

---

†† Reiterは次の定義をExtensionの定義として使っているがこれと本文中の定義は同値であることが知られている。

閉Default Theory (D,W)と一階述語論理式の集合Sに対して$\Gamma(S)$を以下の3つの性質を満たす一番小さな集合とする。

D1. $W \subseteq \Gamma(S)$

D2. $Th(\Gamma(S)) = \Gamma(S)$

D3. $\alpha : M\beta 1,....,M\beta m/w \in D$ かつ $\alpha \in \Gamma(S)$ かつ $\neg\beta 1....,\neg\beta m \notin S$ のときに $w \in \Gamma(S)$

Eをある一階述語論理式の集合としたとき、Eが閉Default Theory (D,W)のExtensionになるのは、$E = \Gamma(E)$を満たすときである。

る。

$$\frac{Bird(A):MFly(A)}{Fly(A)} \quad \frac{Bird(B):MFly(B)}{Fly(B)} \quad \frac{Bird(Tweety):MFly(Tweety)}{Fly(Tweety)} \ldots \qquad (1.6)$$

W＝{Bird(Tweety)} のとき、E をTh({Bird(Tweety),Fly(Tweety)}) として $\cup_{i=0}^{\infty} E_i$を求めてみよう。

$E_0 = W = \{Bird(Tweety)\}$

$E_1 = Th(E_0) \cup CGD(D,E_0,E)$

$\quad = Th(\{Bird(Tweety)\}) \cup \{Fly(Tweety)\}$

ここで、Bird(Tweety):MFly(Tweety)/Fly(Tweety)$\in$D 、Bird(Tweety)$\in E_0$ 、$\neg$Fly(Tweety)$\notin$Eであるので、CGD(D,E_0,E)＝{Fly(Tweety)}となる。

$E_2 = Th(E_1) \cup CGD(D,E_1,E)$

$\quad = Th(Th(\{Bird(Tweety)\}) \cup \{Fly(Tweety)\}) \cup \{Fly(Tweety)\}$

$\quad = Th(\{Bird(Tweety),Fly(Tweety)\})$

$E_3 = Th(E_2) \cup CGD(D,E_2,E)$

$\quad = Th(\{Bird(Tweety),Fly(Tweety)\}) \cup \{Fly(Tweety)\}$

$\quad = Th(\{Bird(Tweety),Fly(Tweety)\})$

$E_i = Th(\{Bird(Tweety),Fly(Tweety)\}) \qquad (i \geq 4)$

したがって、$\cup_{i=0}^{\infty} E_i = Th(\{Bird(Tweety),Fly(Tweety)\}) = E$となるので、Eは Extensionとなり、結果としてFly(Tweety)が導かれることになる。

さらに、上のWに「Tweetyが飛ばない」という情報、すなわち$\neg$Fly(Tweety)が加わってW'＝{Bird(Tweety),$\neg$Fly(Tweety)}となったとして Extensionを求めてみよう。このときにE' をTh({Bird(Tweety), $\neg$Fly(Tweety)})として、$\cup_{i=0}^{\infty} E_i'$を求めると、以下のようになる。

$E_0' = W' = \{Bird(Tweety), \neg Fly(Tweety)\}$

$E_1' = Th(E_0') \cup CGD(D,E_0',E')$

$\quad = Th(\{Bird(Tweety), \neg Fly(Tweety)\}) \cup \{\ \}$

$\quad = Th(\{Bird(Tweety), \neg Fly(Tweety)\})$

$E_2' = Th(E_1') \cup CGD(D,E_1',E')$

$\quad = Th(Th(\{Bird(Tweety), \neg Fly(Tweety)\})) \cup \{\ \}$

$\quad = Th(\{Bird(Tweety), \neg Fly(Tweety)\})$

$E_i' = Th(\{Bird(Tweety), \neg Fly(Tweety)\}) \qquad (i \geq 3)$

したがって$\cup_{i=0}^{\infty} E_i' = Th(\{Bird(Tweety), \neg Fly(Tweety)\}) = E'$となるので、E'は Extensionとなり、結果として$\neg$Fly(Tweety)が導かれる。つまり、もとの

Default Theory (D,W)において導かれたFly(Tweety)はもはや導かれず、非単調的に推論結果が変化したことを示している。

さて、このように定義されたExtensionの性質を調べてみよう。Extensionは上の鳥の例のようにいつでも唯一であるとはかぎらず、存在しないときや複数存在するときがある。

たとえば、D={:MP/¬P}、W={ }としたとき、以下で述べるように閉Default Theory (D,W)のExtensionは存在しない。ExtensionをEとする。

(1) $\neg P \in E$と仮定したとき、$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$を求めてみる。

$E_0 = W = \{\ \}$

$E_1 = Th(E_0) \cup CGD(D,E_0,E)$

$= Th(\{\ \}) \cup \{\ \}$

$= Th(\{\ \})$

$E_2 = Th(E_1) \cup CGD(D,E_1,E)$

$= Th(Th(\{\ \})) \cup \{\ \}$

$= Th(\{\ \})$

$E_i = Th(\{\ \}) \qquad (i \geq 3)$

したがって、$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = Th(\{\ \})$となり、$\neg P \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$であるので$E \neq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$となり、EがExtensionであることに反する。

(2) $\neg P \notin E$と仮定したとき、$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$を求めてみる。

$E_0 = W = \{\ \}$

$E_1 = Th(E_0) \cup CGD(D,E_0,E)$

$= Th(\{\ \}) \cup \{\neg P\}$

$E_2 = Th(E_1) \cup CGD(D,E_1,E)$

$= Th(Th(\{\ \}) \cup \{\neg P\}) \cup \{\neg P\}$

$= Th(\{\neg P\}$

$E_3 = Th(E_2) \cup CGD(D,E_2,E)$

$= Th(Th(\{\neg P\})) \cup \{\neg P\}$

$= Th(\{\neg P\}$

$E_i = Th(\{\neg P\}) \qquad (i \geq 4)$

したがって、$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = Th(\{\neg P\})$となり、$\neg P \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$であるので$E \neq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$となり、EがExtensionであることに反する。

したがって、どちらの場合も、矛盾が生じるので、上記のDefault TheoryにはExtensionが存在しないことになるが、:MP/¬PというDefaultの直感的な意味を

考えてみると、「¬Pが導かれないならば¬Pを導いてよい」という矛盾した意味になっているので、このDefault Theoryに関してExtensionが存在しなくても実際上は問題はなかろう。

さらに、閉Default Theoryのうち、必ずExtensionが存在する以下で定義されるクラスが知られている。

[定義]　閉正規Default(Closed Normal Default)、閉正規Default Theory(Closed Normal Default Theory)
以下の形をした閉Defaultを閉正規Defaultと言う。

$$\frac{\alpha : Mw}{w} \tag{1.7}$$

また、閉正規DefaultだけからなるDefault Theoryを閉正規Default Theoryと言う。　[終わり]

閉正規Defaultとは、DefaultのMオペレータの右側の論理式と結論部が等しくなっている閉Defaultであり、たとえば、次のDefaultは、閉正規Defaultである。

$$\frac{\forall x(P(x) \lor Q(x)) : M\forall x \exists y(R(x,y))}{\forall x \exists y(R(x,y))} \tag{1.8}$$

また、$D=\{:MP/\neg Q, :MQ/\neg P\}$、$W=\{\ \}$としたとき、閉Default Theory (D,W) のExtensionは2つ存在する。なぜならEを$Th(\{\neg Q\})$としたとき、$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$を求めてみる。

$E_0 = W = \{\ \}$
$E_1 = Th(E_0) \cup CGD(D,E_0,E)$
$\quad = Th(\{\ \}) \cup \{\neg Q\}$
$E_2 = Th(E_1) \cup CGD(D,E_1,E)$
$\quad = Th(Th(\{\ \}) \cup \{\neg Q\}) \cup \{\neg Q\}$
$\quad = Th(\{\neg Q\}$
$E_3 = Th(E_2) \cup CGD(D,E_2,E)$
$\quad = Th(Th(\{\neg Q\})) \cup \{\neg Q\}$
$\quad = Th(\{\neg Q\}$
$E_i = Th(\{\neg Q\}) \qquad (i \geq 4)$

したがって、$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = Th(\{\neg Q\}) = E$となり、EはExtensionとなる。同様に、Fを$Th(\{\neg P\})$としたとき、$\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$を求めると$Th(\{\neg P\})$となり、Fと一致するの

で、FもExtensionとなる。

したがって、上記のDefault TheoryにはExtensionが2つ存在することになる。こういったことは現実世界でも起こりうる。例えば、「人をみたら泥棒と思え」ということと「わたる世間に鬼はない」ということを2つのDefaultで表せば、

$$\frac{Human(x):MBad(x)}{Bad(x)} \qquad \frac{Human(x):M\neg Bad(x)}{\neg Bad(x)} \tag{1.9}$$

ということになり、このときHuman(A)ということだけがわかっていたとすると、Aという人が、悪い人かどうかをこの2つのDefaultからは決めることができない。これは、我々の行う推論と一致しているといえよう。

さらに、さきほどの閉正規Default Theory (D,W)において、Dの中のすべてのDefaultの結論部とWが無矛盾ならば、そのDefault TheoryのExtensionは唯一つに定まることが知られている。

本節では、非単調論理と呼ばれる論理について、特にReiterのデフォルト論理を中心に解説した。これらの論理は「もっともらしい」推論を「そうでないとわからないものはそうである」という推論と考え、それを厳密に扱うために作り出されたものであるといえる。しかし、非単調論理では「そうでないとわからない」というところを「否定が証明不可能である」としているが、これは一般には計算不可能になってしまう。この計算不可能性の問題のとらえかたとして2つあると考えられる。一つは、この論理を計算機上で実現するために制限した形で扱うことであり、もう一つは、この論理を人間の推論の一局面の性質を表す認知モデルの定式化として扱うものである。後者の扱い方では、もはや、計算可能であるかどうかは問題ではなく人間の推論のよりよい近似であるかどうかということが問題となるであろう。

3. 極小限定によるアプローチ

前節では古典論理を拡張することによって非単調推論を実現しようとしたが、ここでは古典論理の枠内で実現しようとするアプローチを紹介する。

McCarthy により提案された極小限定(circumscription)[12,13]は常識の一側面を定式化しようとしたものであると考えられる。人間は、川があってボートが

あると聞くと、ボートで川を渡ることができるのではないかと直観的に推測することができる。しかし、もしそのボートに穴があいていることを知れば、もはや先の結論には到達しないであろう。ボートに穴があいていたり、オールがなかったりすると川を渡ることができないと知っているにもかかわらず、なぜ人間が先の結論を得ることができたのか、どうすればこのような非単調な推論が可能となるのかをMcCarthyは、いつも人間がその時々の知識に合う標準的なモデル、標準的な見方をもって推論しているためと考えた。そして、『例外的なものは述べられているもの以外存在しない』とすることで標準モデルを規定できると考えた。極小限定はまさに『ある性質を満たすものは、述べられているもの以外存在しない』との考えを定式化したものに他ならない。

極小限定は常識的な推論の諸問題に応用されるに従い、修正、一般化が行われ、いくつかの形式が提案されている。そして現在なお、その過程は継続中である。ここでは最も重要で比較的簡明であると思われる並列(parallel)極小限定[7]を取り上げ、基本的な考え方を説明する(以降、この章において単に"極小限定"といった場合、以下の(2.1)式で表される"並列極小限定"を意味するものとする。その他の定式化については章末を参考のこと)。

極小限定の証明論的記述は次の二階述語論理式で与えられる。

[定義]　極小限定((parallel) circumscription):

Pを(相異なる)述語定数(の組)、ZをPに現れない(相異なる)関数や述語定数(の組)、A(P,Z)をP,Z(の要素)が現れる与えられた論理式†とすると、<u>Zを可変とした時のAにおけるPの極小限定(the circumscription of P in A with variable Z)</u>、Circum(A;P;Z)とは二階述語論理式

$$A(P,Z) \wedge \neg \exists p,z.(\ A(p,z) \wedge p<P\ ) \qquad \cdots\cdots \quad (2.1)$$

---

† 前節までは"与えられた論理式"を"公理"とし、その集合を考えた。しかし、各公理すべてを論理積('∧' and)でつなぎ、新たに変数が束縛されないように適当な名前ずけを行う(renaming)ことで、等価な1つの論理式を作ることができる。以降、3、4節では表記の便宜上そういった論理式が与えられるものとする。

のことである†。ここで、p,z はP,Zに対応する述語または関数の変数(の組)で、A(p,z)はAにおけるP,Zの出現をすべて対応するp,zに置き換えたものを表す。またp<P(“pはPより小さい”)とは、Pの外延(extension: Pを満たす個体(の組)の集合)がpの外延を真に包含することを表す(p,Pが述語の組の場合は、各々のPの要素の外延が対応するpの要素の外延を包含し、かつ、少なくともそれらの一つを真に包含する††)。 [終わり]

(2.1)式は、与えられた論理式A(P,Z)に対して、それ以下の式が制限を加えている。この式の意味するところは、Zの解釈をどの様に変えても、与えられた論理式Aを満足する、Pより“小さな”どんな述語も存在しないということである。つまり、極小限定は、ある指定した述語(P)に対して、与えられた式(A)の下で許されうる極小の解釈(外延)を与えることを意図している。この結果、性質Pを持つものは、Aを満足するのに必要な最小限度のものに限られ、与えられた式Aに述べられているものだけがPを満たすということになるのである。この式が実際に常識的な推論の実現にどう関与するかは次の例題を通して説明する。

[例題 1]　以下の論理式A1について考える。

$$\text{A1:}\quad \forall x.\ \neg \mathrm{Ab1}(x) \land \mathrm{Bird}(x) \supset \mathrm{Fly}(x) \qquad \cdots\cdots\ (3.1)$$

$$\land\ \mathrm{Bird}(\mathrm{Tweety}) \qquad \cdots\cdots\ (3.2)$$

A1は、「鳥は、それがある種の例外(Ab1)でなければ飛ぶ。Tweetyは鳥である。」を表す。Tweetyが飛ぶかどうかを推論してみよう。さて、あるものの常識的な解釈を得るには、それが与えられた論理式に反しないかぎり例外でないと考えればよい。それは本質的に、例外的なものは最小限にしか存在を許さないと

---

† 極小化される述語以外のすべての述語が定数の時、即ちZが空の時は単に、Circum(A;P)と書いて、以下の式を表す。

$$A(P) \land \neg \exists p.(\ A(p) \land p<P\ ) \qquad \cdots\cdots\ (2.2)$$

例題3においてはこの記法が使われる。

†† p、Pをn-組の述語とし、それぞれp1,…,pn、P1,…,Pnとすると、p<Pは以下の論理式で表せる。

$$\forall x.(p1(x) \supset P1(x)) \land \cdots \land \forall x.(pn(x) \supset Pn(x))$$

$$\land\ \neg(\forall x.(p1(x) \equiv P1(x)) \land \cdots \land \forall x.(pn(x) \equiv Pn(x))) \qquad \cdots\cdots\ (2.3)$$

考えることに等しい。一方、極小限定によって適当な述語に極小の解釈、即ち、その述語を満足するものが最小限になるような解釈を与えることができる。そこで例外的な性質を極小限定することで常識的な推論が可能となると考えるわけである。この場合、例外的なものであることを意味する述語Ab1を極小化の対象とすればよい(Pに対応)。しかし、実際にはこれだけでは十分でない。というのも、Ab1の極小化だけではAb1の解釈に影響を与えるだけであって、他の述語の解釈はそのまま変わらないからである。与えられた論理式A1から飛ぶことがわからないもの(導出できないもの)は、やはり飛ぶかどうか不明のままである[4]。Ab1に応じてFlyの解釈を変えることを許してはじめて、極小限定によってFlyに関する新しい事実を得ることができるのである。ある述語の極小化に従って、解釈を変えたい場合その述語を可変とするのである。ここでは、Flyを可変とすることにしよう(Zに対応)。そこで、極小限定Circum(A1; Ab1; Fly)からの推論を考えてみることにしよう。Circum(A1; Ab1; Fly)は(2.1)式から、

$$A1(Ab1,Fly) \quad \cdots\cdots (3.4)$$
$$\land \neg\exists p1,z.(\ A1(p1,z) \land p1 < Ab1\ ) \quad \cdots\cdots (3.5)$$

即ち、

$$A1(Ab1,Fly) \quad \cdots\cdots (3.6)$$
$$\land \neg\exists p1,z.(\quad \cdots\cdots (3.7)$$
$$\forall x.\ \neg p1(x) \land Bird(x) \supset z(x) \quad \cdots\cdots (3.8)$$
$$\land\ Bird(Tweety) \quad \cdots\cdots (3.9)$$
$$\land\ \forall x.\ (p1(x) \supset Ab1(x)) \land \neg\forall x.\ (Ab1(x) \equiv p1(x)) \quad \cdots\cdots (3.10)$$
$$) \quad \cdots\cdots (3.11)$$

となる。ここで、(3.8)~(3.9)式はA1(p1,z)に対応し、(3.1)~(3.2)式におけるAb1、Flyをそれぞれp1、zに置き換えたものである。また、(3.10)式は $p1 <$ Ab1 に対応する。さて、先に期待される結果を予想してみよう。極小化したい性質であるAb1の性質を持つものが存在することをA1から立証することは不可能であるので、Ab1の性質を持つものは存在しないと予想できる。実際に(3.8)~(3.9)式、及び(3.10)式の前半の式において、p1 に $\lambda x.false$、z に $\lambda x.true$ をそれぞれ代入して得られる式、

$$\forall x.\ \neg(false) \land Bird(x) \supset true \quad \cdots\cdots (3.12)$$
$$\land\ Bird(Tweety) \quad \cdots\cdots (3.13)$$
$$\land\ \forall x.\ (false \supset Ab1(x)) \quad \cdots\cdots (3.14)$$

は、A1から導ける†(ここで、falseは $Q \land \neg Q$、trueは $Q \lor \neg Q$ を表す。但し、

Qは任意の述語)。さて、ここでもし(3.10)式の後半の式に対応する$\neg\forall x.(Ab1(x) \equiv \mathrm{false})$が成り立つとすると、(3.8)~(3.10)を満足する述語p1,zが実際に存在したことになり、そういった述語は存在しないといっている(3.6)~(3.11)式に矛盾する。従って、

$$\forall x.(Ab1(x) \equiv \mathrm{false}) \qquad \cdots\cdots (3.15)$$

即ち、

$$\forall x.\neg Ab1(x) \qquad \cdots\cdots (3.16)$$

がCircum(A1 ; Ab1 ; Fly)から得られることになる。極小限定の結果、「何ものも例外ではない(例外であるものは存在しない)」ことがいえたわけである。そして、(3.1)、(3.16)式から

$$\forall x.Bird(x) \supset Fly(x) \qquad \cdots\cdots (3.17)$$

が得られ、(3.2)、(3.17)式から

$$Fly(Tweety) \qquad \cdots\cdots (3.18)$$

が導かれるので、結局、Circum(A1 ; Ab1 ; Fly)からTweetyは飛ぶと推論できることになる。

さて、ここで新たな事実、「Tweetyは飛ばない」、が判明したとしよう。即ち、$A1 \wedge \neg Fly(Tweety)$ が与えられる。この式をA1'としよう。すると、Circum(A1'; Ab1; Fly)は、

$$
\begin{array}{ll}
A1'(Ab1,Fly) & \cdots\cdots (3.19)\\
\wedge\ \neg\exists p1,z.(& \cdots\cdots (3.20)\\
\qquad \forall x.\neg p1(x) \wedge Bird(x) \supset z(x) & \cdots\cdots (3.21)\\
\quad \wedge\ Bird(Tweety) & \cdots\cdots (3.22)\\
\quad \wedge\ \neg z(Tweety) & \cdots\cdots (3.23)\\
\quad \wedge\ \forall x.(p1(x) \supset Ab1(x)) \wedge \neg\forall x.(Ab1(x) \equiv p1(x)) & \cdots\cdots (3.24)\\
\qquad\qquad) & \cdots\cdots (3.25)
\end{array}
$$

† 極小限定は(一般に)高階で表現されているため、実際にそのままの形で利用するのは難かしい。しかし、あるクラスの極小限定は等価な一階の論理式に機械的に変換できることが判っている。それは、例えば例題1におけるp1,zが機械的操作で求められるクラスであって、実は例題1~例題3はその場合に属している。詳しくは論文[7]を参照されたい。

となる。今度は、鳥であって飛ばないTweety は例外である(Ab1の性質を満たす)ことが(3.1)式より分かるから、Tweety だけがAb1の性質を満たすとしたい。そこで、Ab1に対応する p1 を $\lambda x.(x=\mathrm{Tweety})$ とし、z を(3.21)、(3.23)式を満たすように $\lambda x.(\neg(x=\mathrm{Tweety}))$ とすれば(3.21)~(3.23)式、及び(3.24)の前半式がA1'より導ける。よって、(3.19)~(3.25)から

$$\neg(\neg \forall x. (\mathrm{Ab1}(x) \equiv x=\mathrm{Tweety})) \qquad \cdots\cdots (3.26)$$

つまり

$$\forall x. (\mathrm{Ab1}(x) \equiv x=\mathrm{Tweety}) \qquad \cdots\cdots (3.27)$$

が導かれることになり、今度は「Tweetyだけは例外である」を得る。新しい情報「Tweety は飛ばない」に基づき、定理であった(3.15)式「何ものも例外でない」が取り下げられ、修正された定理(3.27)式がこれに代わったわけである。この結果、もはや先の結論「Tweety は飛ぶ」が導かれることはない。というのも、(3.1)及び(3.27)式から得られるのは、(3.17)式ではなく、

$$\forall x. \neg(x=\mathrm{Tweety}) \wedge \mathrm{Bird}(x) \supset \mathrm{Fly}(x) \qquad \cdots\cdots (3.28)$$

つまり、「Tweety以外の鳥は飛ぶ」という主張に代わっているからである。

以上の推論はまさに非単調性を有しており、極小限定が非単調推論の一つの形式になっていることを表している。

さて、一般的にはある述語よりも別の述語の方を優先的に極小化したいことがある。次の例を見てみよう。

[例題 2] 以下の論理式A2について考える。

$$\begin{aligned} \mathrm{A2}: \quad & \forall x. \mathrm{Penguin}(x) \supset \mathrm{Bird}(x) && \cdots\cdots (4.1) \\ & \wedge \forall x. \neg \mathrm{Ab1}(x) \wedge \mathrm{Bird}(x) \supset \mathrm{Fly}(x) && \cdots\cdots (4.2) \\ & \wedge \forall x. \neg \mathrm{Ab2}(x) \wedge \mathrm{Penguin}(x) \supset \neg \mathrm{Fly}(x) && \cdots\cdots (4.3) \\ & \wedge \mathrm{Penguin}(\text{p-suke}) && \cdots\cdots (4.4) \end{aligned}$$

これらの式は、「ペンギンは鳥である。鳥は、それがある種の例外(Ab1)でなければ飛ぶ。ペンギンは、それがある種の例外(Ab2)でなければ飛ばない。P-sukeはペンギンである。」を表す。そして、P-sukeが飛ぶかどうかを推論する。さて、例題1と同様に述語Ab1、Ab2を極小限定し、Flyを可変とするだけでは望む結果、『P-sukeは飛ばない』は得られない。このことは、(4.1)~(4.3)から導かれる次の(4.5)を考えると分かりやすい。

$$\forall x. \mathrm{Penguin}(x) \supset \mathrm{Ab1}(x) \vee \mathrm{Ab2}(x) \qquad \cdots\cdots (4.5)$$

即ち、そのペンギンは飛ぶことに関して、鳥の例外(Ab1)とみるか、それともペンギンの例外(Ab2)とみるか決められないのである。ペンギンは後者よりは前者の例外としたい。こうした場合はAb1であることよりもAb2であることの方がめずらしいという意味で、Ab2を優先的に極小化し、次にAb1を極小化することで解決することができる。即ち、Ab2の解釈を、Flyの他、Ab1も可変とし、極小限定することで決めてしまう。そしてAb1の解釈は、(Ab2の解釈に触れずに)Flyのみを可変とし、Ab1を極小限定するのである。従って、

$$\text{Circum}(\ A2\ ;\ Ab2\ ;\ Ab1,\ Fly\ ) \qquad \cdots\cdots \ (4.6)$$

$$\wedge\ \text{Circum}(\ A2\ ;\ Ab1\ ;\ Fly\ ) \qquad \cdots\cdots \ (4.7)$$

とすると、

$$\forall x.(Ab2(x)\ \equiv\ false) \qquad \cdots\cdots \ (4.8)$$

$$\wedge\ \forall x.(Ab1(x)\ \equiv\ Penguin(x)) \qquad \cdots\cdots \ (4.9)$$

$$\wedge\ \forall x.(Fly(x)\ \equiv\ Bird(x)\ \wedge\ \neg Penguin(x)) \qquad \cdots\cdots \ (4.10)$$

を得る。この結果、ペンギンであるP-sukeは飛ばないと結論づけられる。

極小限定のモデル論は、(2.1)式に基ずくと、与えられた論理式のすべての"P;Zに関する(Zが空のときは単に、Pに関する)極小モデル(minimal model)"で成り立つ論理式を真とするというものである。ここでP;Zに関する極小モデルとは、P、Z以外の述語や関数の解釈がおなじモデルにおいて、先の"<"の順序に関し、Pの解釈が極小となるモデルのことである。このモデルは、この節の初めに述べた「ある性質を満たすものは、述べられているもの以外存在しない」との考えにそったモデルと考えられる。極小モデルの形式的定義を以下に示そう。まず、そのためにモデル間に先の順序に対応する構造を定義する。

---

† 以下に、(4.1)~(4.3)から(4.5)式の導出を示す。

$\forall x.\ Fly(x) \supset Ab2(x) \vee \neg Penguin(x)$ ((4.3)より)

$\forall x.\ \neg Ab1(x) \wedge Bird(x) \supset Ab2(x) \vee \neg Penguin(x)$ ((4.2)及び上式)

$\forall x.\ Penguin(x) \supset Ab1(x) \vee Ab2(x) \vee \neg Bird(x)$ (上式)

$\forall x.\ Penguin(x) \supset Ab1(x) \vee Ab2(x)$ ((4.1)及び上式)

[定義]　モデル間の順序($\leqq^{P;Z}$)

Mをあるモデル構造、Kを述語(または関数)定数とするとき、$|M|$によってMの個体領域(domain)、$M[|K|]$によってモデルMでのKの外延を表すことにすると、任意のモデル構造M_1、M_2において、$M_1 \leqq^{P;Z} M_2$が成立するのは、以下の関係が成り立つことが必要十分である。

(1) $|M_1| = |M_2|$

(2) P、Zに現れない任意の述語または関数定数Kに対して、$M_1[|K|] = M_2[|K|]$

(3) Pのすべての要素P_iに対して、$M_1[|P_i|] \subseteq M_2[|P_i|]$　　[終わり]

この時、P;Zに関する極小モデルは以下のように定義できる。

[定義]　P;Zに関する極小モデル

Mが論理式AのP;Zに関する極小モデルであるとは、MがAのモデル構造であって、$N <^{P;Z} M$を満たすAのモデル構造Nが存在しないことである(ただし、$N <^{P;Z} M$は、$N \leqq^{P;Z} M$であって、かつ、$M \leqq^{P;Z} N$でないことを表す)。

[終わり]

[例題 3]　以下の論理式A3について考える。

A3:　　　$\mathrm{Block}(A) \vee \mathrm{Block}(B)$　　　…… (5.1)

例えば、次の構造M_1, M_1', M_2, M_3はすべてA3のモデルである(つまり、A3は各々の構造上で真となる)。

$|M_1| = |M_1'| = |M_2| = |M_3| = \{a, b, c, d\}$,　(個体領域は a, b, c, d の4個体からなる)

$M_1[|A|] = \{\} \mapsto \{a\}$,

$M_1[|B|] = \{\} \mapsto \{b\}$,

$M_1[|C|] = \{\} \mapsto \{c\}$,

$M_1[|D|] = \{\} \mapsto \{d\}$,　(構造$M_1$においてA,B,C,Dは、各々 a, b, c, d を指す)

Block以外の任意の述語または関数定数Kに対して(A,B,C,Dも0-引数の関数として含まれていることに注意)、

$M_1[|K|] = M_1'[|K|] = M_2[|K|] = M_3[|K|]$,

Blockに対しては、

$M_1[|\mathrm{Block}|] = \{a\}$,　(構造$M_1$においてはaだけがブロックである)

$M_1'[|\mathrm{Block}|] = \{b\}$,　(構造$M_1'$においてはbだけがブロックである)

$M_2[|\mathrm{Block}|] = \{a, b\}$,　(構造$M_2$においてはaとbだけがブロックである)

$M_3[\![Block]\!]=\{a, b, c\}$　　　(構造M_3においてはa, b, cだけがブロックである)

ここで、M1がA3のモデルとなることだけを説明しておくと、M1では、Aはブロックであるaのことであり、Bはブロックでないbのことを指すから、Block(A)は真であり、Block(B)は偽である。よって、A3は真。故に、M1はA3のモデルである。さて、構造間の順序“$\leqq_{Block}$”をいれて、先の定義に従って大小比較してみよう。するとBlockの外延の包含関係から明らかに、

$$M_1 \leqq_{Block} M_2,\ M_1' \leqq_{Block} M_2,\ M_2 \leqq_{Block} M_3$$

であることが判る。また、極小モデルの定義からM_1及びM_1'はBlockに関する極小モデルである。というのも、両者より“小さな”構造ではBlockの外延は空集合、即ち、どんなものもブロックではなくなってしまう。これは明らかにA3のモデルではない。よって、M_1, M_1'は両者とも極小モデルの条件を満たしているのである。実際に、Circum(A3;Block)からは、

$$\forall x.(Block(x) \equiv (x=A)) \vee \forall x.(Block(x) \equiv (x=B)) \qquad \cdots\cdots (5.2)$$

が導ける†。これはまさに、「AのみがBlockか、あるいはBのみがBlockである」との主張にほかならないのであって、全ての極小モデル上で成り立つ事実である。

極小限定では健全性は保証されるが、完全性は一般には保証されないことが分かっている[3,12,18]。即ち、極小限定によって得られた結果はすべての極小モデル上で真となるが(健全性)、すべての極小モデル上で真となる式がすべて極小限定から導ける(完全性)わけではない。

また、任意の無矛盾な論理式には、必ずしも極小モデルが存在するとは限らない。この場合には極小限定の結果が矛盾を起こす[4]。しかし、極小モデルが存在する論理式のクラスや、無矛盾性を維持するクラスについては最近解明が進んでいる[8]。

---

† 以下に、導出の概略を示す[12]。

$A3(Block) \wedge \neg\exists p.((p(A) \vee p(B)) \wedge \forall x.(p(x) \supset Block(x)) \wedge \neg\forall x.(p(x) \equiv Block(x)))$　(前提)

$\forall x.(x=A \supset Block(x)) \supset \forall x.(x=A \equiv Block(x))$　(上後半式pに$\lambda x.(x=A)$代入)

$Block(A) \supset \forall x.(x=A \equiv Block(x))$　(上式より)

$Block(B) \supset \forall x.(x=B \equiv Block(x))$　(pに$\lambda x.(x=B)$代入、同様)

$\forall x.(Block(x) \equiv (x=A)) \vee \forall x.(Block(x) \equiv (x=B))$　(上2式、A3(Block)より)

極小限定の応用として、特にデータベースや、あるいはロジック·プログラミングにおける否定の解釈との関連が最近注目されている。例えば、確定節のみからなるデータベースにおいて、閉世界仮説(closed world asumption)は、すべての述語を極小限定した結果に一致することが判っている[10]。また、否定を持つ性質のよいプログラムとして注目されている層状プログラム(stratified program)に対し、極小限定は宣言的な意味論を与えることができる[11]。

さて、最後に暗黙論理と極小限定との関係について述べる。ここまで見てきたように、両者は共にある不完全な知識から有効な結論を導く推論の形式化を目指したものであったが、両者は構文レベルでも、意味論レベルでも異なっている。しかし、両者とも同じ現象を捕えようとする試みであるから、どちらかの理論が他方を包含(subsume)しているかどうかは興味深い問題である[5,6]。この問題は今なお完全には明らかになっていないが、幾つかの部分的な結果を示すことができる。

異なる理論間の包含関係は、一方の理論の任意の式を、定理の集合を変えずに他方の理論のある式に移す変換が存在するかどうかで判定することができる。この様な変換を“適切な変換†”と呼ぼう。即ち、一方の理論から他方の理論への適切な変換が常に存在すれば前者の理論は後者に含まれることになる。

まず、極小限定が暗黙論理を包含することはない。つまり、極小限定では決して表しえない(適切な変換ができない)暗黙論理の式が存在する††。逆はまだ解明されていないが、与えられた式に対して、閉領域であって、かつ、現れるすべての述語が変数(極小化されるか、可変として扱われるか)とされる場合には適切な変換が存在する[5]。

4. 極小限定による様々な推論の定式化

---

† Imielinskiの定義[6]ではさらに制限があるが、ここでの説明の簡明化のため割愛する。
†† 例えば、Default Theoty(D,W) をD={:M a≠b / a≠b}、W={ }とすると、これと等価な働きをする極小限定は存在しえない[5,2]。

人間の行うある種の論理的飛躍を伴う推論の一形式として極小限定が提案された。極小限定による定式化は前節でみたとおり、①デフォルト論理に比べ、モデル論との整合性がよく、見通しよい研究が期待できる。②述語Pと同値な述語が、与えられた知識に基づいて動的に決定され、柔軟で発見的な知識処理を可能とするなど、高度な推論を実現するうえで多くの利点があると考えられる。極小限定は、閉世界仮説的な考え方、『ある性質を満たすものは、述べられているもの以外存在しない』との考えを定式化したものであった。しかし、この様な考え方は人間の多様で豊かな推論のほんの一部しか説明していない。これ以外にも人間の推論には無視できぬ大変重要な側面が残されているように思える。それらは類推や帰納などで表される、知識を関連づけて一般化する推論であり、人間の学習能力に密接に関係している推論である。本節ではこの様な観点に立って、極小限定を見ることにする。そのために、筆者の一人が提案した偏向極小限定(partially directional circumscription)†[1]を使って極小限定が様々な高次の推論を定式化する可能性を示唆する。偏向極小限定は極小限定による推論を含めた論理的飛躍のある様々な推論の一形式となっている。偏向極小限定は次の考えを定式化したものである。即ち、『ある性質を満たすものは、述べられていない限り、領域ごとに設定された標準的な性質をもつ』というものである。

即ち、極小限定ではある性質を極小化することにのみ注意が向けられていたのに対し、この推論ではその性質を任意の性質に近づけることができ、それによって様々な推論を形式化することが可能となる。

偏向極小限定は以下の式で表せる。ここでは極小限定の定義中で使用した記号を同じ意味で使う。また、Ψ、Λは述語定数(の組)である。この時、偏向極小限定は次のように定義される。

[定義]　偏向極小限定(partially directional circumscription)

---

† 偏向極小限定は、論理式極小限定(formula circumscription)[13]の考えを高次の推論の定式化のために特に特殊化したものである。

以下の論理式を、Zを可変としたAにおけるΨの中でのPのΛへの偏向極小限定、Pd-circum(A ; P~Λ /Ψ ; Z)と呼ぶ。

$$A(P,Z)$$
$$\wedge \neg\exists p,z.(\ \Lambda(p,z) \wedge \lambda x.(\Psi(x)\supset(P(x)\equiv\Lambda(x))) < \lambda x.(\Psi(x)\supset(p(x)\equiv\Lambda(x)))\ ) \cdots\cdots \quad (6.1)$$

[終わり]

(6.1)式の意味するところは、Zの解釈をどの様に変えても、Ψを満足する領域のなかでは、与えられた論理式Aを満足する、Pより“Λに近い”P以外のどんな述語も存在しないということである。つまり、偏向極小限定は、ある性質(Ψ)を満足する領域において、与えられた式(A)の許されうる範囲で、ある指定した述語(P)の解釈をできるだけΛに近いものにするを意図している。

偏向極小限定のモデルは、極小限定のモデル論と同様に考えられる。そのモデルをP;Zに関するΛにおける極大Ψ偏向モデルと呼ぶ。Λにおける極大Ψ偏向モデルとは、Λの外延に関してPとΨの外延の共通部分が極大となるモデルである。

偏向極小限定は様々な推論を非単調推論として形式化する。以下、例題によってそれらをみることにしよう。

[例題4]　(極小限定)

極小限定は述語Pの外延を空集合にできるだけ近づけるものと解釈できるから、全領域におけるPのfalseへの偏向とみればよい。(6.1)において、Λをλx.(false)、Ψを全ての個体の持つ性質、λx.(true)とすればよい。即ち、Pd-circum(A ; P~λx.(false) /λx.(true); Z)から

$$A(P,Z) \wedge \neg\exists p,z.(\ A(p,z) \wedge p<P\ )$$

を得る。これは(2.1)式に他ならない。この理由で、先述の極小限定の例題は偏向極小限定の例題でもある。

前節の極小限定では、常識的な推論を行うために例外的な性質を表す述語、“Ab_n”を導入し、その述語を極小化する方法を採った。偏向極小限定では、そういった述語を使わないより直接的な方法で常識的な推論を定式化することが可能となる。次の例題でそれを示す。

[例題5]

前節の例題2と同等の推論を、偏向極小限定を使い以下の式で行うことができる。先ず、一階述語論理式で直接表せる知識、「ペンギンは鳥である。P-sukeはペンギンである。」をA4とすると、A4は

A4: $\forall x.\mathrm{Penguin}(x) \supset \mathrm{Bird}(x)$ ····· (7.1)

$\wedge$ Penguin(p-suke) ····· (7.2)

と書ける。次に常識的な知識、「ペンギンは、それがある種の例外でなければ飛ばない」は、例外的性質"Ab_n"を導入することなく直接、

Pd-circum(A4; Fly~λx.(false) / Penguin) ····· (7.3)

と表すことができる。これは"ペンギン"において"飛ぶ"の解釈を"存在しない"方向に偏向するから、『ペンギンの世界では、飛ぶものは普通いないとみるべきである』を表し、いわば、「ペンギンは一般的に飛ばない」という知識を自然に表現したものと考えることができる。さて、例題2における残りの常識的な知識、「鳥は、それがある種の例外でなければ飛ぶ」即ち、「鳥は一般的に飛ぶ」は、例題2で生じた問題に注意をはらって表さなければならない。"飛ぶ"の解釈は"鳥"の世界の一部である"ペンギン"の世界において、(7.3)式により解釈の性格付けが既に決まっているから、残りの"鳥"の世界においてのみ解釈の性格付けを行うようにすればよい。従って、

Pd-circum(A4; Fly~λx.(true) / λx.(Bird(x) $\wedge$ $\neg$Penguin(x))) ····· (7.4)

と表すことによって、望む結果、

$\neg$Fly(p-suke) ····· (7.5)

を得ることができる。

[例題6] (類推、帰納)

A5を「Hectorは生物であり、火傷すると悲しむ。Brutusも火傷すると悲しむ。」とする。これは、以下の様に書けるだろう。

A5: Animate(hector) ····· (8.1)

$\wedge$ Burnt(hector) $\supset$ Sad(hector) ····· (8.2)

$\wedge$ Burnt(brutus) $\supset$ Sad(brutus) ····· (8.3)

この時、「Brutusも生物である」を引き出したい。ここで、全領域において「生物である」性質を「火傷すると悲しむ」性質に偏向してみよう。即ち、

Pd-circum(A5; Animate~λx.(Burnt(x) $\supset$ Sad(x)) / λx.(true)) ≡

$A5(Animate)$ ..... (8.4)

$\wedge \neg \exists p.($ ..... (8.5)

$A(p)$ ..... (8.6)

$\wedge \lambda x.(true \supset (Animate(x) \equiv (Burnt(x) \supset Sad(x))))$ ..... (8.7)

$< \lambda x.(true \supset (p(x) \equiv (Burnt(x) \supset Sad(x))))$ ..... (8.8)

$)$ ..... (8.9)

からの推論を考える。前節と同様、(8.6)~(8.8)式の p に $\lambda x.(Burnt(x) \supset Sad(x))$ を代入した式を考えてみると、(8.6)式、即ち $A5(\lambda x.(Burnt(x) \supset Sad(x)))$ は(8.4)式から導かれ、また(8.8)式、$\lambda x.(true \supset ((Burnt(x) \supset Sad(x)) \equiv (Burnt(x) \supset Sad(x))))$ は $\lambda x.(true)$ に等しいいから、結局、Pd-circum(A5; Animate ~ $\lambda x.(Burnt(x) \supset Sad(x)) / \lambda x.(true)$) から次の式が導ける。

$\neg(\lambda x.(Animate(x) \equiv (Burnt(x) \supset Sad(x))) < \lambda x.(true)))$ ..... (8.10)

これは、

$\neg(\quad \forall x.((Animate(x) \equiv (Burnt(x) \supset Sad(x))) \supset true)$

$\wedge \neg \forall x.((Animate(x) \equiv (Burnt(x) \supset Sad(x)))) \equiv true)$ ..... (8.11)

ということであるから、

$\forall x.(Animate(x) \equiv (Burnt(x) \supset Sad(x)))$ ..... (8.12)

が得られたことになる。(8.3)、(8.12)式から

$Animate(brutus)$ ..... (8.13)

が得られる。

偏向極小限定による類推は次のように行える。例えば二者が『似ている』とは両者がある共通の性質(Λ)を有することを意味する。そこで一方の持つある性質(P)をその共通する性質に偏向すると、矛盾しない限り他方もその性質(P)を持つと推論することができる。この様な定式化は類推に対して重要な二つの示唆を与えると考えられる。一つは類推の帰納的側面を明確にすること。例題6において、「生物である」性質を共通する性質「火傷すると悲しむ」に偏向することによって(8.12)式「"生物である"ことと"火傷すると悲しむ"ことが等しい」を帰納することができた。(8.13)式「Brutusも生物である」はその帰納の結果から(演えきによって)得られたものである。もう一つは'ある性質'と'共通の性質'との関係についてである。ある点において『似ている』からといって、一方の持つ性質はなんでも他方も持っていると考えることは妥当ではないだろう。極小限定において'ある性質'を極小化することが正当化される条件として、その性質を満たさない場合が、満たす場合に比べ一般的であることが、暗黙裏に仮定されてい

た。それと全く同様に偏向極小限定の見地から、'ある性質'を'共通の性質'に偏向することが正当化される条件として、'ある性質'と'共通の性質'を共に満たすか、'ある性質'と'共通の性質'を共に満たさないかのどちらかである場合が、それ以外の場合に比べ一般的であることが要求される。先の例では、「生物であり」、「火傷すると悲しむ」場合と、「生物でなく」、「火傷すると悲しまない」場合がそれ以外の場合に比べ一般的であることが要求されているわけである。

以上、極小限定の一種である偏向極小限定を使い、類推や帰納などの高次の推論が非単調推論として形式化できる可能性を例題によって示唆した。これら高次の推論の形式化は、これまで十分に進んできたとはいえないであろう。少なくとも極小限定の考え方、手法は、それらを形式化するうえで大いに参考になると考えられる。極小限定の適用範囲を広げる研究は、その形式的な力によって今後様々な人工知能の本質的問題点を明らかにすることができるだろうと期待され、最も興味深い研究の一つであると考える。

[付録]

極小限定の定式化として現在、以下のものが発表されている。①述語(predicate)極小限定[12]、②領域(domain)極小限定[12,3]、③論理式(formula)極小限定[13]、④優先順位付き(prioritized)極小限定[13]、⑤保護付き(protected)極小限定[16]、⑥並列(parallel)極小限定[7]、⑦可変(variable)極小限定[18]、⑧点別(pointwise)極小限定[9](以上、発表順)。①は、極小限定の最初の形式で、先述の形式において変数Zがないものに等しい。②は、与えられた式に全領域を表す述語を加え、その述語を極小限定する(circumscribe)ことで領域全体を極小化するもので、①の特殊な形とみることができる。しかし、先のボートの例にみる様な常識的な推論を、極小限定の枠組みで行うためには、Z、つまり幾つかの述語や関数を可変にする必要があることが判明した。そのため③では、極小化の対象を述語から論理式に替え、述語変数を導入した。また、より一般的な応用で、ある述語よりも先に別の述語を極小化する必要があり、極小化の優先順位がつけられる④が提案された。⑤では、ある述語の外延のうち、ある性質を満たさない部分だけを選択的に極小限定できるが、変数を含まず明らかに典型的な常識の問題さえ扱えない。しかも③の特殊な形でしかない。しかし、③があまりに一般的な表現であったため、その後、特殊だが十分強力な定式化が探究された。⑥、⑦はそれぞれ別個に発表されたが同様の形式化である。極小化したい論理式と同値な述語を定義し、与えられた式に加え、その述語を極小限定すれば、これらの定式化で③と等価なことが行える[18]。また、例えば優先順位付き極小限定もこれらの形式を使って表現できるため[7]、⑥、⑦は非常に重要である。⑧は一階述語論理で形式化を試みた興味深い例であって、領域上の各個体ごとに、極小化される性質を持たないように解釈を与えることができる。残念ながら上で述べたように、常識の問題に応用しようとするとやはり二階述語論理式にならざるをえないが、この定式を使えば、個体レベルで優先順位を与えることができ、より細かな指定が可能となる。

[参考文献]

[1]: Arima,J.: Learning General Rules with Exceptions: an Application of Circumscription, ICOT TM-476.

[2]: Arima,J.: The Anonym Problem: A Weak Point of Circumscription on Equality, ICOT TR-400.

[3]: Davis,M.: The Mathematics of Non-monotonic Reasoning, *Artificial Intelligence* 13 (1980) 27-39.

[4]: Etherington,D.,Mercer,R. and Reiter,R.: On the adequacy of predicate circumscription for closed-world reasoning, Technical report 84-5, Dept. of Computer Science, Univ. of British Columbia (1984).
[5]: Etherington,D.: Relating Default Logic and Circumscription, *Proc. of Tenth International Joint Conference on Artificial Intelligence,* Milan, Italy (1987) 489-494.
[6]: Imielinski,T.: Results on translating defaults to circumscription, *Proc. of Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence,* Los Angeles, CA (1985) 114-120.
[7]: Lifschitz,V.: Computing circumscription, *Proc. of Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Los Angeles, CA (1985) 121-127.
[8]: Lifschitz,V.: On the Satisfiability of Circumscription, *Artificial Intelligence* 28 (1986) 17-27.
[9]: Lifschitz,V.: Pointwise Circumscription, *Proc. AAAI-86* (1986) 406-410.
[10]: Lifschitz,V.: Closed World Data Bases and Circumscription, *Artificial Intelligence* 27 (1985) 229-235.
[11]: Lifschitz,V.: On the Declarative Semantics of Logic Programs with Negation, *Foundations of Declarative Databases and Logic Programming* (edited by Jack Minker), Los Altos, CA, Morgan Kaufmann Publishers, INC. (1987) 177-192.
[12]: McCarthy,J.: Circumscription - a form of non-monotonic reasoning, *Artificial Intelligence* 13 (1980) 27-39.
[13]: McCarthy,J.: Application of circumscription to formalizing common-sense knowledge, *Artificial Intelligence* 28 (1986) 89-116.
[14]: McDermott,D. and Doyle,J.: Non-monotonic Logic I, *Artificial Intelligence* 13 (1980) 41-72.
[15]: McDermott,D.: Non-monotonic logic II : Non-monotonic modal theories, *J.ACM*, Vol. 29 (1982) 33-57.
[16]: Minker,J. and Perlis,D.: Protected Circumscription, *Proc. AAAI-Workshop Non-Monotonic Reasoning* (1984) 337-343.
[17]: Moore, R.C. : Semantical considerations on nonmonotonic logic, *Artificial Intelligence* 25 (1985) 75-94.
[18]: Perlis,D. and Minker,J.: Completeness Results for Circumscription, *Artificial Intelligence* 28 (1986) 29-42.
[19]: Reiter, R. : A logic for default reasoning, *Artificial Intelligence* 13 (1980) 81-132.