7M－8

項書換えシステム「Metis 」の実装

大須賀昭彦　坂井公　横井俊夫
（新世代コンピュータ技術開発機構）

1．はじめに

項書換えシステム(TRS) とは，書換え規則の集合のことをいうが，理論面で，代数的仕様記述や関数型プログラミング言語にモデルを与えたり，等式を含んだ定理の証明に応用されたりしている他，実用面では，これに基くプログラミング言語や，定理証明システム等もいくつか提案され，理論・実用の両面からその有効性が確認されてきている．

ICOTでは，知的プログラミングシステム構築活動の一環として TRSワーキンググループ(TRS-WG)を組織し，プログラミング活動の諸問題の解決に取り組んでいるが，今回TRS-WGの支援のもとに，TRSに関する種々の技術を研究する目的で，実験システム"Metis" を実装したので，ここに，その機能概要を報告する．

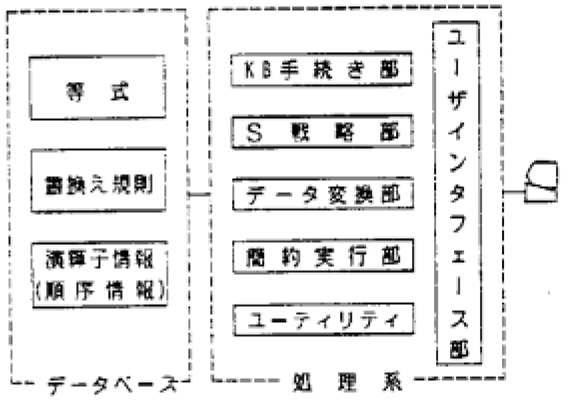

図-1.Metisシステム構成

2．ＴＲＳの定義

TRSに関する一般的な定義は既知とする[3]．但し，確認のため，簡約と完備なTRS の定義のみ以下に与える．

定義．項 t が部分項 s を持つことを $t[s]$ と表すと，$t[s]$ は，$s=\theta(L)$ なる代入(substitution) θ が存在するとき，書換え規則 $L\rightarrow R$ によって，$t[\theta(R)]$ に簡約される．これを，$t[s]\Rightarrow t[\theta(R)]$ と表す．

定義．TRS Rに於て，$t0\Rightarrow t1\Rightarrow \ldots\ldots$ なる無限の簡約が存在しないとき，Rは停止性(termination) を持つという．また⇒の反射推移閉包を $\overset{*}{\Rightarrow}$ で表すと，任意の項 t に対し $t\overset{*}{\Rightarrow}u$，$t\overset{*}{\Rightarrow}v$ ならば $u\overset{*}{\Rightarrow}w$，$v\overset{*}{\Rightarrow}w$ なる項wが必ず存在するとき，Rは合流性(confluency)を持つという．停止性と合流性を同時に持つTRS を完備な(complete)TRS と呼び，任意の TRSに論理的に等価な変型を施して，完備な TRSを得ることを完備化という．

3． Metisシステム構成

図１にMetis のシステム構成を示す．データベースには等式，書換え規則と演算子に関する情報及び順序データが蓄えられる．処理系には，完備化を行うKB手続き部，S戦略部の他に，等式と書換え規則間のデータ変換を行う変換部，完備化された規則によって，項の簡約，等式の証明を実行する簡約部，入出力等を行うユーティリティ部がある．Metisに於けるこれらの処理は，ユーザインタフェース部を通して会話的に行われる[8]．

4．Metisの機能

Metisは，TRSに関する技術を研究するため必要な基本的機能として，①等式の書換え規則化（停止性保証）機能，②完備化機能，③簡約機能等を備えている．ここでは特に，完備なTRS の要件である停止性と合流性の保証機能について説明する．

4-1．停止性の保証

停止性の問題は一般に決定不可能である．Metis ではこの問題に対し，複数の単純化順序 (simplification ordering)[1]による停止性の保証を試みる．つまり，任意の書換え規則 $L\rightarrow R$ に対して，$L>R$ (>は適当な単純化順序) となることを示し，停止性を保証する．このとき，演算子間の順序関係が重要かつ複雑となるが，これに関してはシステムが自動的に推論するので，ユーザの予備知識はほとんど必要とされない．単純化順序には，①辞書式部分項順序(lexicographic subterm ordering)[5]，②勝抜順序[6]，③多重集合順序(multiset ordering)[1]，④分割順序(decomposition ordering)[1] 等が用意され，演算子毎に適切な順序付を選択出来る．特に①②④は強単純化順序[2] にもなっている．

4-2．合流性の保証

合流性の保証には，Knuthらによる完備化手続き，及び，その拡張手続きを適用する．

4-2-1．Knuth-Bendix(KB)の完備化手続き

KB手続きは，等号論理の公理を論理的に等価で完備な TRS へ変換する．手続きは，以下の過程の繰返しからなる[4,5,7]．

(1) 等式の書換え規則化
(2) 書換え規則の簡約
(3) 要対法の実行，要対の等式化

Term Rewriting System generator Metis
Akihiko OHSUGA, Ko SAKAI, Toshio YOKOI
INSTITUTE FOR NEW GENERATION COMPUTER TECHNOLOGY (ICOT)

(4) 等式の簡約

この繰返しは，等式が空になったとき停止し，その時点での書換え規則が完備な TRSとなる．

定義．ここで，要対(critical pair) とは，t[s]→u, L→R が与えられ，θ(s) = θ(L) なる代入θが存在するとき，< θ(u), θ(t[R]) >の組のことをいい，この要対を求める手続きを要対法と呼ぶ．

但し，このKB手続きは，① (1)で等式の向付ができない場合，② (3)で無限の要対を生成し続け，手続きが停止しない場合に失敗する．

4-2-2. Ｓ戦略

Ｓ戦略は，KB手続きの失敗を回避する戦略の１つであるが，完備化手続きとしてよりも，与えられた等号論理でのある等式の成立を決定する（半）決定手続きとして動作する．KB手続きとの主な違いは，①方向付のできない規則を両方向書換え規則として扱う，②証明したい等式の否定を不等式の形で持つことができるの２点である．KB完備化手続きを以下の様に拡張する[2]．

定義．両方向規則を L↔R の様に表すと，t[s]↔u, L↔R が与えられ，θ(s)=θ(L), θ(R) ≵ θ(L) かつ θ(u) ≵ θ(t[s])なる代入θが存在するとき，< θ(u), θ(t[R]) >の組を拡張要対(extended critical pair)といい，これを求める手続きを拡張要対法という．ここで，＞は強単純化順序を表す．

定義．t[s]は，θ(L)=s かつθ(L) ＞θ(R) なる代入θが存在するとき L↔R によって，t[θ(R)]へ拡張簡約(extended reduction)される．

定義．t[s]≠u, L↔R が与えられ，θ(s)=θ(L) かつ θ(R) ≵ θ(L) なる代入θが存在するとき，θ(t[R] ≠ u)は，t[s]≠u から拡張狭化(extended narrowing)によって得られたという．

これらを利用して，Ｓ戦略は以下の過程を繰返す．

(1) 等式の（両方向規則を含む）書換え規則化
(2) 書換え規則の拡張簡約
(3) 拡張要対法の実行，拡張要対の等式化
(4) 不等式に対する拡張狭化の実行
(5) 等式の拡張簡約

この繰返しは，①任意の不等式の右左辺が単化可能(unifiable) となるか，または，②等式が空になったときに停止する．①は不等式の矛盾による元の等式の成立を，②は完備化の完了と（不等式が存在すれば）元の等式の不成立をを意味する．

4-2-3. AC完備化手続き

KB手続きが失敗する 4-2-1①の場合について，特別な単化アルゴリズムを導入して，これを回避する試みがある．AC完備化手続きは，多くの場合，結合・交換(AC)規則に向付ができず①が生じることに注目し，要対法にAC単化を組込んで処理を行う[7]．

５．実行例

KB手続きでは完備化できない等号論理に対し，Ｓ戦略が等式の成立に関する決定手続きとなる例を示す[2]．

e1: s(X,s(Y,Z)) = s(f(X,Y),Z)

e2: s(m,X) = s(X,X) で定義される等号論理をＥとすると，ＥはKB手続きでは完備なTRS とはならないが，ある等式 e3: ∀X ∃Y.s(X,Y)=Y の否定

e3':s(a,X)≠ X

を与えると，以下の手順でe3のＥ上での成立を証明する．

１．e1を方向付し，規則化する．

r1: s(f(X,Y),Z) → s(X,s(Y,Z))

２．e3' を規則化する．

r2: s(a,X)↛X

３．e2は方向付できないので，両方向規則化する．

r3: s(m,X)↔s(X,X)

r1とr3の拡張要対として次を得る．

e4: s(X,s(Y,f(X,Y))) = s(m,f(X,Y))

r2とr3から拡張狭化によって次を得る．

e5: s(m,a)≠a

４．e4も方向付できないので，両方向規則化する．

r4: s(X,s(Y,f(X,Y)))↔s(m,f(X,Y))

r1とr4の拡張要対として次の２式を得る．

e6: s(X,s(Y,s(Z,f(f(X,Y),Z))))=s(m,f(f(X,Y),Z))

e7: s(X,s(Y,s(Z,f(X,f(Y,Z)))))=s(m,f(X,f(Y,Z)))

r2とr4から拡張狭化によって次を得る．

e8: s(m,f(a,X)) ≠ s(X,f(a,X))

e8式は，代入θ={m/X}によって単化可能であり，矛盾となる．これによって，Ｅ上e3式の成立が証明される．

６．おわりに

Metis1.0版の機能概要について説明した．今後はこの上で，定理証明の立場から TRSについての研究を進めると同時に，システムの機能の充実をはかっていく．今のところ，以下の機能について検討している．

- 帰納法への応用(inductionless induction)
- タイプの導入

参考文献

[1] N.Dershowitz, "Termination", Lecture Notes in Comput.Sci,202,Springer-Verlag, PP.180-224,1984

[2] J.Hsiang, "On Word Problems in Equational Theories -Extended Abstract-",1985 (private communication)

[3] G.Huet and D.C.Oppen,"Equations and rewrite rules : A survey",in R.Book(Ed.), Formal Languages : Perspective and Open Problems, Academic Press,pp.349-393,1980.

[4] D.Knuth and P.Bendix,"Simple Word Problems in Universal Algebras", in J.Leech(Ed.), Computational Problems in Abstract Algebra, pp263-297,1970

[5] K.Sakai, "An Ordering method for term rewriting systems", ICOT TR-062,1984

[6] K.Sakai,"Knuth-Bendix Algorithm for Thue System Based on Kachinuki Ordering", ICOT TM-0087,1984

[7] 坂井,"Knuth-Bendixの完備化手続きとその応用" コンピュータソフトウェア，（発行予定）

[8] 大須賀, "Metisユーザーズマニュアル",ICOT TR, （発行予定）