2007年度 情報数学
一階述語論理 (first-order logic)

2007年5月18日
情報理工学科　上田 和紀

参考にしている本（追加）

- 小野寛晰：情報科学における論理，日本評論社，1994.
- 萩谷昌己：ソフトウェア科学のための論理学，岩波書店，1994.
- Chang, C.-L., and Lee, C.-T.（長尾真，辻井潤一訳）：コンピュータによる定理の証明，日本コンピュータ協会，1983.

命題論理の限界

- 命題論理では，個々の単文の内部構造に立ち入った表現や推論は扱えない
- 例１：
  - Socrates is a human.
  - (All) humans are mortal.
  - Therefore, Socrates is mortal.
- 例２：
  - 7 is a prime number greater than 2.
  - 7 is an odd number.
  - Therefore, there exists an odd prime number greater than 2.

一階述語論理は「関係」指向

- 大多数の平叙文や命題は
  - ものの（カテゴリへの）所属　(Kitty is a cat.)
  - ものの性質　(Kitty is white.)
  - ものの動作　(Kitty runs fast.)
  - ものとものとの関係　(Kitty has a toy.)
    - 主語と主語，主語と補語，主語と目的語

  などを表現している．
- 要は *n* 個のものの間に成立する関係を表現している
  - *n* 項関係とは数学的には何か？
  - 1 項関係とは？
  - 0 項関係とは？

答1: その関係にある「もの」の組の集合
答2: bool 値を返す *n* 引数関数

一階述語論理の特徴

- 一階述語論理では，（広義の）「関係」や「もの」を記号化できる
  - 例：human(socrates)
  - 例：prime(7) ∧ greater(7,2)
  - ➔ 述語（または述語動詞）が中心，主語や目的語などは引数
- さらに，「もの」を一般化して（= 特定せずに）扱うこともできる
  - 例：∀X (human(X) ⇒ mortal(X))
    - なぜ mortal(human) としないのか？
  - 例：∃X (odd(X) ∧ prime(X) ∧ greater(X,2))

一階述語論理で扱う記号

(1) 述語（述語記号）

- 「もの」のカテゴリへの所属　student(bob)
- 「もの」の性質　tall(bob)
- 「もの」の動作　runs(bob)
- 「もの」と「もの」との関係　likes(bob,liz)

- 述語に「もの」を引数として与えると原子論理式 (atomic formula) となる
  - 原子論理式は真か偽を表わす
- 引数をとらない述語は命題論理の命題変数に対応する

一階述語論理で扱う記号

(2) 定数（定数記号）　bob, 0, june, nil

- きまった「もの」を表わす

(3) 変数（変数記号）　X, Y, Who

- いろいろな「もの」を表わす

(4) 関数（関数記号）　s(X), date(dec,31)

- 「もの」から「もの」を作る（次頁）

- (2)〜(4) を用いて「もの」や「データ」を表わす項 (term)を構成する
- “一階”とは，変数には「もの」を表す変数（一階の変数）しかないことを表す.

関数記号の役割

- 単純な記号を組み合わせて，より複雑な「もの」を表現する手段（cf. “the 〜 of 〜”）
  - date(24,june,2005)
  - c(1,2)
  - s(s(s(s(s(0)))))
  - 1+2*3　または　+(1,*(2,3))
  - rectangle(point(X0,Y0),point(X1,Y1))
- “関数”と考えるよりも“データ構造”と考えた方が自然な場合も少なくない
- 関数も述語も，引数の個数 (arity) は固定
- 定数は，0 引数の関数と考えても良い

一階述語論理式の例

1. (i) $\exists Y \forall X$ (loves(X,Y)) (ii) $\forall X \exists Y$ (loves(X,Y))
   (iii) $\exists Y \forall X\ (X \geq Y)$ (iv) $\forall X \exists Y\ (X \geq Y)$
2. $\forall X$ (add(0,X,X)) $\wedge \forall X \forall Y \forall Z$ (add(X,Y,Z) $\Rightarrow$ add(s(X),Y,s(Z)))
3. $\forall X$ (fever(X) $\wedge$ cough(X) $\Rightarrow$ cold(X))
4. $\forall X$ ($\neg$scolded(X) $\Rightarrow \neg$study(X))
5. (i) $\forall X \forall Y\ (X \neq Y \Rightarrow g(X) \neq g(Y))$
   (ii) $\forall Y \exists X \forall X'\ (X' > X \Rightarrow f(X') > Y)$
6. (i) 国籍(夫(花子),米国)
   (ii) $\exists X$ (夫婦(X,花子) $\wedge$ 国籍(X,米国))

構文 (syntax) と意味 (semantics)

- 構文 ≒ 形 (form)，意味 ≒ 内容 (content)
- この二つは論理学，自然言語，プログラム言語など，あらゆるコトバにおける車の両輪
  - どのような形の文や式が許されているか？
  - それらの文や式はどのような内容を表すのか？
- 注意：構文的な正しさと意味的な正しさは別の概念

$1 + \neq 2$ vs. $3 > 5$

- 以下の数枚のスライドではまず構文を紹介

一階述語論理式の構文

- ユーザがきめる記号（の集合）
  - V ： 変数記号の集合
  - F_i ： i 引数関数記号の集合 ($i \geq 0$)
  - P_i ： i 引数述語記号の集合 ($i \geq 0$)
- 一階述語論理が用意する記号
  - （単項演算子）L_1 ::= $\neg$
  - （二項演算子）L_2 ::= $\wedge \mid \vee \mid \Rightarrow$
  - （限定記号） Q ::= $\forall \mid \exists$
  - （区切り記号 “,” “(” “)” は，使うけれども本質的なものではない）

一階述語論理式の構文

- （項） T ::= $V \mid F_n T_1 \ldots T_n$
- （原子論理式）A ::= $P_n T_1 \ldots T_n$
- （論理式） W ::= $A \mid L_1 W \mid W L_2 W \mid Q\, V\, W$
  - 英語では *well-formed formula*
  - V を，限定記号 Q の束縛変数 (bound variable) という

限定記号 (quantifiers)

- 限量子ともいう
- ∀: 全称記号 (universal quantifier) “all” “every”
  - TeXでは ¥forall
- ∃ : 存在記号 (existential quantifier) “some” “there is”
  - TeXでは ¥exists
- よく使う略記法
  - $\forall X > 0\ (f(X) > 0)$
  - $\exists X > 0\ (f(X) = 0)$

束縛出現と自由出現

「変数」と「変数の出現」をしっかり区別しよう

- 例：$p(X) \Rightarrow \exists Y(q(X,Y) \wedge \forall X(r(X,Y)))$
- 論理式 W の中の変数 u の出現は，u の祖先に u を束縛変数とする限定記号がない場合，W における自由出現 (free occurrence) という．W に自由出現する変数を W の自由変数 (free variable) という．
- 論理式 QuW の W の中の変数 u の自由出現は，論理式 QuW においては Q による束縛出現 (bound occurrence) であるという．
- 変数の束縛出現は，束縛する限定記号の種類によって，全称束縛または存在束縛されているという．

α変換

束縛変数もα変換も実は高校数学で出てきた概念！

- 束縛変数の名前を変更して等価な論理式を得ること
  - 例： $\forall X(p(X)) \wedge \exists Y(q(Y)))$
    $\rightarrow \forall X(p(X)) \wedge \exists X(q(X)))$
- 論理式 QuW において，W の中の u のすべての自由出現を，W に出現しない変数 v に置き換えたものを U とする． QuW と QvU とは等価(なはず)である．
  - 例： $\forall X(p(X) \wedge \exists Y(q(Y)))$
    $\rightarrow \forall Z(p(Z) \wedge \exists Y(q(Y)))$
    $\leftarrow \forall Y(p(Y) \wedge \exists Y(q(Y)))$
    （３つともすべて本質的に同じ）

閉論理式 (closed formula)

- 自由変数を一つももたない論理式を，閉論理式という．
- 平叙文で書かれた知識や数学的性質の多くは，一階述語論理の閉論理式で表現できる（＝知識表現）．
  - 数学では，論理式の頭に並ぶ全称記号がしばしば省略される（例： $x+y=y+x$）
- 知識を論理式で表現するには次の手順を踏む．
  1. 対象領域（変数の動く範囲）を決める
  2. 適切な定数，関数，述語を導入してその意味を決める
  3. 閉論理式への翻訳を行う

閉論理式を用いた知識表現の練習

1. 花子を知る人はみな彼女を尊敬している
2. 独身の男が孤独とは限らない
3. (i) どんな人にも，母親がちょうど一人いる
   (ii) どんな人にも，親がちょうど二人いる
   （X=Y: X と Y が同一人物である）
4. 最大の整数なるものは存在しない
5. k は m と n の公約数である
6. (i) $\lim_{x\to\infty} f(x)=c$ (ii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
7. $f(n)=\mathrm{O}(n^2)$

閉論理式を用いた知識表現の練習

1. Every son of my father is my brother.
2. Some lecture was attended by every student.
3. Every student attended some lecture.
4. Some student attended every lecture.
5. Every lecture was attended by some student.
6. Some lecture was attended by no student.
7. Only Tom hates Mary.
8. Tom hates Mary only.
9. Tom is as tall as any other classmate of him.

等号について

- 述語論理による知識表現では，２引数の述語記号 “=” をよく用いる．“=” は次のような等号の公理を満たすものと仮定される．
  1. $\forall X(X = X)$
  2. 任意の m 引数関数記号 f に対して
     $$\forall X_1 \ldots \forall X_m \forall Y_1 \ldots \forall Y_m (X_1 = Y_1 \wedge \ldots \wedge X_m = Y_m \Rightarrow f(X_1,\ldots,X_m) = f(Y_1,\ldots,Y_m))$$
  3. 任意の m 引数述語記号 p に対して
     $$\forall X_1 \ldots \forall X_m \forall Y_1 \ldots \forall Y_m (X_1 = Y_1 \wedge \ldots \wedge X_m = Y_m \Rightarrow (p(X_1,\ldots,X_m) \Rightarrow p(Y_1,\ldots,Y_m)))$$
  注：対称律，推移律は 1. と 3. から出てくる

一階述語論理式の表すもの（意味）

- 一つの論理式の真偽は，それを構成する個々の記号の意味（解釈）から決まる
  cf. 日本語文の意味は個々の単語の意味から決まる
- 具体的には，閉論理式全体の真偽は一般に
  (a) 対象領域（ものの（空でない）集合）
  — 何についての話をしているのか
  (b) 個々の定数記号，関数記号，述語記号の解釈
  — 個々の記号はどういう意味で使っているのか
  が与えられて初めて定まる．
- (a) と (b) の組を構造 (structure) という

構造 (structure)

- 逆に，頭の中の知識を論理式（記号列）に翻訳するには，まず，特定の構造（= 翻訳のための約束事）を定める必要がある
  - つまり定数，関数，述語の意味は，論理式を書いた人がきめるのが建前
    - cf. 日常会話や数学書では，多くの記号や単語をあらかじめ了解された意味で使っている
      - 例：関数 sin の意味は固定されているが関数 f の意味はケースバイケース
  - ∧ や ∀ などの論理記号の意味は一階述語論理の全ユーザに共通であり，特定の構造には依存しない

解釈 (interpretation，意味関数)

- 対象領域を $\boldsymbol{D}$ とするとき，記号列（論理式やその構成要素） $\boldsymbol{e}$ の解釈は以下のように定まる．
  - $\boldsymbol{e}$ の解釈を $[[\,\boldsymbol{e}\,]]$ と書く（outfix 記法）
- $\boldsymbol{n}$ 引数関数記号 $\boldsymbol{f}$ の意味 $[[\,\boldsymbol{f}\,]] : \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \boldsymbol{D}$，および $\boldsymbol{n}$ 引数述語記号 $\boldsymbol{p}$ の意味 $[[\,\boldsymbol{p}\,]] : \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow$ {真，偽} の意味は人間が決める
  - 例：$[[\,1\,]] = 1$，$[[\,*\,]](x, y) = x \times y$，$[[\,!=\,]](x, y) = x \neq y$
- 項の解釈は $[[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1, ..., \boldsymbol{t}_n)]] = [[\,\boldsymbol{f}\,]]([[\boldsymbol{t}_1]], ..., [[\boldsymbol{t}_n]])$
原子論理式の解釈は $[[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}_1, ..., \boldsymbol{t}_n)]] = [[\boldsymbol{p}\,]]([[\boldsymbol{t}_1]], ..., [[\boldsymbol{t}_n]])$
によって帰納的に定義される．

解釈（つづき）

- 論理演算子の意味 $[[\neg]]$，$[[\wedge]]$，$[[\vee]]$，$[[\Rightarrow]]$ は，真理値表が定めるとおり．
  - 例：$[[\wedge]]$ (真 , 真) = 真，$[[\wedge]]$ (真 , 偽) = 偽, . . .
- 限定記号の意味は次のように定める
  - (準備) $\boldsymbol{W}$ の中の自由変数 $\boldsymbol{u}$ の出現を，$\boldsymbol{W}$ 中に出現しない定数 $\boldsymbol{c}$ に置き換えた式を $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{c}/\boldsymbol{u}]$ と書く．
  - $[[\forall \boldsymbol{u} \boldsymbol{W}]]$ は，“$\boldsymbol{c}$ の解釈，すなわち $[[\,\boldsymbol{c}\,]]$ が何であっても $[[\boldsymbol{W}[\boldsymbol{c}/\boldsymbol{u}]]] =$ 真 になること”と定める
    - 「みんないい人だ」vs.「A さんはいい人だ」
  - $[[\exists \boldsymbol{u} \boldsymbol{W}]]$ は，“$\boldsymbol{c}$ の解釈，すなわち $[[\,\boldsymbol{c}\,]]$ をうまくとれば $[[\boldsymbol{W}[\boldsymbol{c}/\boldsymbol{u}]]] =$ 真 になること”と定める

恒真性と充足可能性

- 閉じた一階述語論理式 $\boldsymbol{W}$ も次の３通りに分類できる：

1. 恒真 (valid) — すべての構造において $[[\,\boldsymbol{W}\,]] =$ 真
   - 例：∀X(likes(X,mary)) ⇒ likes(tom,mary)
2. 充足可能 (satisfiable, consistent) — $[[\,\boldsymbol{W}\,]] =$ 真 となる構造が存在する ー だが恒真ではない
   - 例：∀Y ∃X(is-mother-of(X,Y)) （要注意）
3. 充足不可能 (unsatisfiable) — すべての構造において $[[\,\boldsymbol{W}\,]] =$ 偽
   - 例：∀X(likes(X,mary)) ∧ ¬ likes(tom,mary)

- 「真」と「恒真」の違いに注意！

基本的な恒真式

（Q は x を自由変数として含まないとする）

- $\forall xP \land Q \Leftrightarrow \forall x\,(P \land Q)$　$\exists xP \land Q \Leftrightarrow \exists x\,(P \land Q)$
- $\forall xP \lor Q \Leftrightarrow \forall x\,(P \lor Q)$　$\exists xP \lor Q \Leftrightarrow \exists x\,(P \lor Q)$
- $\neg\forall xP \Leftrightarrow \exists x\,(\neg P)$　$\neg\exists xP \Leftrightarrow \forall x\,(\neg P)$
- $\forall xP \land \forall xR \Leftrightarrow \forall x\,(P \land R)$　$\exists xP \lor \exists xR \Leftrightarrow \exists x\,(P \lor R)$
- $\forall xP \lor \forall xR \Rightarrow \forall x\,(P \lor R)$　$\exists x\,(P \land R) \Rightarrow \exists xP \land \exists xR$
  - 問：最後の二つの式の逆 ($\Rightarrow$ を $\Leftarrow$ に換えたもの) は恒真でない．次の論理式が偽となる構造を作れ．
    1. ∀X(p(X) ∨ q(X)) ⇒ ∀X(p(X)) ∨ ∀X(q(X))
    2. ∃X(p(X)) ∧ ∃X(q(X)) ⇒ ∃X(p(X) ∧ q(X))

冠頭標準形 (prenex normal form)

- 論理式の先頭（木構造で考えるときは上の方）に限定記号を集めた論理式．正確には
  - 限定記号を一つも含まない論理式は冠頭標準形
  - 論理式 W が冠頭標準形ならば，論理式 QuW（Q は限定記号，u は変数）も冠頭標準形
- 前頁の公式を使うと，どんな論理式 W も，それと論理的に同値な（つまり $W \Leftrightarrow W'$ が恒真であるような）冠等標準形 W' に変換できる．
  - 問：∀X(∃Y(p(X,Y)) ⇒ ∃Y(p(X,Y) ∧ r(Y))) を冠頭標準形に変換せよ．

論理的帰結

- 論理式 $A_1, ..., A_n$ が真となるようなすべての構造の下で B が真になる（つまり $A_1, ..., A_n$ が正しければ B も正しい）とき，論理式 B が 論理式 $A_1, ..., A_n$ の論理的帰結であるといい， $A_1, ..., A_n \vDash B$ と書く．
  - 注意：$A_1, ..., A_n \vDash B$ は論理式ではない．
- 【定理】つぎの二つは同じことである：
  1. 論理式 B が論理式 $A_1, ..., A_n$ の論理的帰結である，つまり $A_1, ..., A_n \vDash B$
  2. 論理式 $A_1 \land ... \land A_n \Rightarrow B$ が恒真である，つまり $\vDash A_1 \land ... \land A_n \Rightarrow B$

モデル

- 論理式 W が構造 S の下で真となる，すなわち S の下で $[[\,W\,]]$ = 真 となるとき，構造 S を W のモデル (model) といい，$S \vDash W$ と書く．
  - 注：記号 ⊨ は二通りの意味で使われる
  - 例：∃X∀Y(r(X,Y)) のモデルの例
    - 対象領域 $D = \{1, 2, 3\}$
    - $[[\,r\,]] = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$
      - $D^n \to \{$真 , 偽$\}$ の関数は，「関数値が真になる引数の組の集合 ($\subseteq D^n$)」と同一視可能
  - 問：∃X(q(X)) ∧ ¬∀X(q(X)) のモデルを一つ作れ．

いくつかの注意

Q1. ∊ は一階述語論理式の中で使ってよいか？

A1. ∊ は集合と要素の関係なので，両辺の対象領域が異なることになる．x ∊ Food のような関係は，「集合 Food に属する」という意味の 1 引数の述語 food を使って food(x) と書けばよい．

Q2. 「後藤先生と上田は情報数学を担当している」を述語論理で表現するときの対象領域は何か？

A2. 人間あるいは大学教授の集合と科目の集合との合併集合．変数の動く範囲も両方にまたがるので，動く範囲を大学教授に限定するには，述語記号を導入して ∀Y(professor(Y) ⇒ ...) のように表現すればよい．

練習問題

(1) v(X): X は野菜である，e(X): 私は X を食べる
   - a. 「野菜以外（の食べ物）は何でも食べます」
   - b. 「野菜は食べません」
   - c. 「食べる野菜も食べない野菜もあります」

(2) p(X,Y): X はYの親，X=Y: X と Y は同一人物）
   「どんな人にも，親がちょうど二人いる」

(3)
   - a. 「k は m と n の公約数である」
   - b. 「k は素数である」